Modelos Heterocedasticos (2): GARCH

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

6 de noviembre de 2024

Contenidos

Motivación

Motivación

- En este curso daremos privilegio a las series financieras, las cuales son modeladas mediante procesos ARCH (1982) debido a Engle, y GARCH (1986) debido a Bollerslev. También encontraremos los modelos SV (Volatilidad estocástica), debido a Harvey. A partir de estos se generan otros modelos tales como el GARCH-M, I-GARCH, etc. El ajuste de modelos a serie de tiempo se aplica diariamente.

Formulación

- Bollerslev (1986) propone una extensión conocida como ARCH generalizado (GARCH). El proceso GARCH(p,q) está dado por.

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

.

- donde ϵ_t *iid* $N(0,1)$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, q$ y $\sum_{i=1}^{\text{máx}\{p,q\}} (\alpha_i + \beta_j) < 1$.
- Si $q = 0$, el modelo anterior se reduce a un ARCH(p).

Formulación

- Las características de los modelos GARCH se pueden ver fácilmente en el modelo más simple, GARCH(1,1), que, además, en la práctica suele ser un modelo adecuado. En este caso, la varianza condicionada sigue la ecuación:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

.

- donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ y $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$.
- Note que un GARCH(1,1) se corresponde con un modelo ARCH(1) con una estructura particular para los parámetros de los términos retardados de r_t^2.

Formulación

Propiedades del modelo GARCH(1,1)

- Tanto la media condicionada como la marginal de r_t son cero.
- La varianza condicionada es σ_t^2
- La varianza marginal es $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$
- Puede demostrarse que, bajo el supuesto de que $\epsilon_t \sim N(0,1)$, el coeficiente de curtosis de y_t viene dado por

$$\frac{3(1-(\alpha_1+\beta_1)^2)}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2} \quad > \quad 3$$

- donde se debe cumplir la restricción $1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2 > 0$ para que el momento de orden 4 sea positivo.

Formulación

Propiedades

- El modelo GARCH(1,1) establece una dependencia de los cuadrados de las observaciones como un proceso ARMA(1,1).
$$r_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) r_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1}$$
- donde η_t es un proceso de ruido blanco formado por variables estacionarias incorrelacionadas de media cero y varianza marginal constante, $\eta_t = r_t^2 - \sigma_t^2$
- El coeficiente $(\alpha_1 + \beta_1)$ es conocido como persistencia y en las series financieras se suele obtener una estimación próxima a la unidad.

Estimación de los Parámetros

- Consideremos un modelo GARCH(1,1). Los parámetros del modelo son α_0, α_1 y β_1.
- Los parámetros son estimados de forma similar al modelo ARCH, es decir utilizando la EMV condicional. Si $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\beta}_1$ son estimados, entonces en el instante t la volatilidad estimada es.

$$\hat{\sigma}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 r_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2$$

- donde r_{t-1} es observado y σ_t^2 ha sido calculado al tiempo t-1.

Formulación

- En general, si un proceso r_t es un proceso GARCH(p,q) entonces.

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i r_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

- Se puede mostrar que el proceso GARCH(p,q) es un proceso ARMA(m,p) no lineal en términos de $\eta_t = \sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1)$, donde $m = max\{p, q\}$,$\gamma_i = (\alpha_i + \beta_i)$, con $\alpha_i = 0$, $i > q$ y $\beta_j = 0$, $j > p$.
- El procedimiento para estimar los parámetros es como antes por medio de las técnicas de maxima verosimilitud.

Propiedades

Ventajas y desventajas de los modelos ARCH/GARCH

- La principal ventaja es la facilidad para usarlos y la rápidez en el proceso de estimación. Esto es realmente importante para la predicción online la cual es necesaria en los mercados.
- ¿Pero es la simplicidad mas importante que la sofistificación?.
- ¿Los modelos ARCH/GARCH son fáciles de implementar, pero serán capaces de capturar la verdadera volatilidad?.
- ¿Puede el modelo GARCH acomodarse a información inesperada?.
- ¿Podría incluirse todos los cambios sobre los parámetros del modelo?.

Propiedades

Debilidades de los Modelos GARCH

- Los modelos GARCH presentan, al igual que los procesos ARCH, algunas debilidades. En concreto, la respuesta de la volatilidad a los shocks positivos es la misma que a los negativos debido a que depende del cuadrado de los anteriores schoks. Es bien conocido que los precios de un acción responde diferente a positivos y negativos schoks.
- El modelo ARCH/GARCH dadas las observaciones pasadas $F_{t-1} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{t-1}\}$, la distribución de r_t es normal con media cero y varianza σ_t^2. La preferencia de la distribución normal en vezde la tStudent es extraña, ya que para la varianza estimada σ_t^2 y la distribución de r_t/F_{t-1} se espera que tenga colas pesadas.

Propiedades

Debilidades de los Modelos GARCH

- Si $|\alpha_0| < 1$, $|\alpha_j| < 1$ y $|\beta_j| < 1$, entonces .

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- Se sigue que σ_t^2 es solo una combinación lineal de los valores pasados $r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{t-1}^2$. Por ejemplo, para el GARCH(1,1) puede escribirse:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= \xi_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \xi_i r_{t-i}^2 \end{aligned}$$

donde $\xi_0 = \frac{\alpha_0(1-\beta_1)}{1-\beta_1}$, $\xi_i = \alpha_1 \beta_1^i$ $(i = 1, \ldots, t-1)$

Las observaciones pasadas no siempre son buenos estimadores.
Necesitamos incluir más información en el modelo.

Propiedades

Debilidades de los Modelos GARCH

- Probablemente estos modelos sobrepredicen la volatilidad, porque responden lentamente a grandes cambios aislados de shocks en el retorno de la serie.

Formulación

- Por lo general, en las serien financieras reales que se nos presentan a menudo tienen irregularidades y un nivel de correlación en sí mismas, no sólo en sus cuadrados. Por ello es que se debe transformar la serie original y encontrar un modelo para la misma.
- Supongamos que llamamos z_t a la serie orginal, sea $y_t = log z_t$, diferenciamos a esta un cierto número de veces, hasta obtener $x_t = (1 - B)^k y_t$ y con esta última es con la que trabajos.
- La serie x_t aún podría tener estructura. Cuando dibujamos su ACF y la de sus cuadrados, estas podrían tener pics fuera de la banda de confianza, lo que està indicando correlaciones..
- En estos casos se hace necesario ajustar un modelo ARIMA a la serie, y como aún hay alguna estructura de correlación en los cuadrados de los residuos se debe ajustar a estos a continuación un modelo GARCH..

Formulación

- En estos casos hablamos de modelos ARIMA-GARCH. Mostramos el caso particular ARMA-GARCH.
- Las series financieras que presentan baja correlación se le ajusta un modelo ARMA cuyas innovaciones son un proceso GARCH. Por lo tanto el modelo $ARMA(p_1, q_1) - GARCH(p_2, q_2)$ a utilizar esta dado por,

$$
\begin{aligned}
r_t &= \phi_1 r_{t-1} + \phi_1 r_{t-2} + \ldots + \phi_{p_1} r_{t-p_1} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_{q_1} \epsilon_{t-q_1} \\
\epsilon_t &= \nu_t \epsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \sigma_{t-j}^2
\end{aligned}
$$

.

Formulación

- Como se aprecia en la ecuación anterior el proceso de estimación se divide en dos etapas.
  1. Se ajusta un modelo ARIMA a $y_t = \log z_t$ y se determinan los residuos $\{\epsilon_t\}$.
  2. Se ajusta un modelo GARCH(p,1) a los residuos obtenidos de 1..
- En algunos casos nos podríamos encontrar con que la serie y_t presente una correlación persistente; por ejemplo algunas tasas de cambio tienen una ACF que decae con una muy larga memoria.
- Bajo un procedimiento similar se puede ajustar a la serie un modelo ARFIMA-GARCH.

Formulación

- En la práctica, en la estimación de los modelos GARCH(1,1) suelen obtenerse valores $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \approx 1$. Por ello, surgieron los modelos GARCH integrados o IGARCH (Engle y Bollerslev (1986)), que son modelos GARCH que tienen una raíz unitaria en la representación como un ARMA de r_t^2
- Por ejemplo, un proceso IGARCH(1,1) está formado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_t &= \epsilon_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

- donde $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Por anto el proceso r_t no es débilmente estacionario ya que su varianza marginal $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$ no es finita.

Formulación

- El modelo GARCH en media (GARCH-M) propuesto por Engle, Lilien and Robins (1987) consiste en el sistema:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \mu + c\sigma_t + \epsilon_t \\
\epsilon_t &= \sigma_t \eta_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2
\end{aligned}
$$

- donde c se conoce como prima de riesgo, que se espera que sea positivo.
- Este modelo caracteriza la evolución de la media y la varianza de una serie de tiempo de forma simultánea.

Modelos Heterocedasticos (2): GARCH

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

6 de noviembre de 2024