Modelos Heterocedasticos (3): Volatilidad Estocástica

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

29 de noviembre de 2024

Contenidos

Motivación

Motivación

- Los modelos de volatilidad estocastica (SV) se diferencian de los modelos heterocedásticos vistos previamente en la forma de modelar la volatilidad. Así, el primer tipo de modelos se caracteriza porque la varianza condicional depende de las observaciones pasadas de la serie (modelos ARCH) y de sus propios valores pasados (modelos GARCH), mientras que en los modelos de volatilidad estocástica la volatilidad es función de un proceso estocástico no observable.
- Esto da una interpretación distinta de las series financieras de la que dan los modelos GARCH; el inconveniente de ocupar este modelo es que la estimación es mucho mas compleja, ya que no es posible obtener una fórmula cerrada para la función de verosimilitud.

Motivación

Motivación

- Comparando ambos modelos, el de SV es más flexible para analizar la dinámica del riesgo, ya que se supone que tanto el retorno como la volatilidad tienen dinámicas propias. Por ejemplo, en el modelo ARCH la dinámica de la volatilidad depende funcionalmente del valor del retorno. Por el contrario, en el modelo SV la dinámica de la volatilidad puede o no depender funcionalmente del retorno.

Formulación

- El modelo de volatilidad estocastica (SV) se define sobre $\ln(\sigma_t^2)$ en vez de σ_t^2, similar a los modelos EGARCH, para asegurar positividad de la varianza condicional. Un modelo SV se define como,

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t &= exp^{S_t/2} \\ \Phi(B)S_t &= \Theta(B)\eta_t \end{aligned}$$

- donde ϵ_t es iid $N(0,1)$, η_t es iid $N(0,\sigma_\eta^2)$, η_t y ϵ_t son independientes y las raíces de los polinomios $\Phi(B)$ y $\Theta(B)$ mayores a 1 en modulo.

Formulación

- Este modelo puedo ser reescrito como,

$$
\begin{aligned}
r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\
(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)\log(\sigma_t^2) &= (1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q)\eta_t
\end{aligned}
$$

- El modelo más simple de volatilidad estocastica es conocido como SV-AR(1) y se define como:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\
(1 - \phi B)\log(\sigma_t^2) &= \eta_t
\end{aligned}
$$

- Tambien podemos definir el modelo SV-AR(1) con media μ:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\
(1 - \phi B)(\log(\sigma_t^2) - \mu) &= \eta_t
\end{aligned}
$$

Propiedades

- Sea $\alpha_0 = \mu(1-\phi)$, Jacquier, Polson, and Rossi (1994) muestran que para el modelo SV-AR(1) con

$$log(\sigma_t^2) \quad \sim \quad N\left(\frac{\alpha_0}{1-\phi}, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right)$$

- Además:
  - $\mathbb{E}(r_t^2) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$
  - $\mathbb{E}(r_t^4) = 3\exp(2\mu^2 + 2\sigma^2)$
  - $\rho(r_t^2, r_{t-i}^2) = \frac{\exp(\sigma^2\phi^i)-1}{3\exp(\sigma^2)-1}$

Propiedades

- El modelo de Volatilidad Estocástica da una interpretación distinta de las series financieras de la que dan los modelos GARCH
- El inconveniente de ocupar este modelo es que la estimación es mucho mas compleja, no es posible obtener una fórmula cerrada para la función de verosimilitud.
- Comparando ambos modelos, el de S.V. es más flexible para analizar la dinámica del riesgo, ya que se supone que tanto el retorno como la volatilidad tienen dinámicas propias.
- Por ejemplo, en el modelo ARCH la dinámica de la volatilidad depende funcionalmente del valor del retorno.
- Por el contrario, en el modelo S.V. la dinámica de la volatilidad puede ó no depender funcionalmente del retorno.

Sistema de Espacio-Estado

- Para estimar el modelo SV, necesitamos un metodo de quasi-verosimilitud vía Filtro de Kalman o el Método de MonteCarlo.
- Para implementar el filtro de Kalman es importante introducir previamente los sistemas de espacio-estado (SEE)
- Los SEE se escriben como:

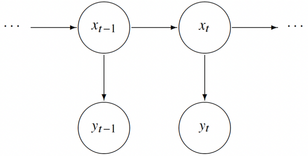
$$X_{t+1} = F_t X_t + V_t \tag{1}$$

$$Y_t = G_t X_t + W_t \tag{2}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^m$ es el vector de estado en el tiempo t. $Y_t \in \mathbb{R}^r$ es el vector de observaciones al tiempo t. $F_t \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz llamada de transición, $G_t \in \mathbb{R}^{r \times n}$ es una matriz llamada de observaciones, $V_t \in \mathbb{R}^m$ es un ruido de estado y W_t un ruido de observaciones.

Sistema de Espacio-Estado

- En general, el modelo de espacio estado se caracteriza por dos principios. En primer lugar, existe un proceso oculto o latente X_t denominado proceso de estado.
- Se supone que el proceso de estado es un proceso de Markov; esto significa que el futuro y el pasado, son independientes condicionados por el presente X_t.
- La segunda condición es que las observaciones, Y_t sean independientes dados los estados X_t. Esto significa que la dependencia entre las observaciones es generada por los estados.
- Estos principios se observan en la siguiente figura,



Estabilidad

- Un sistema espacio estado se dice estable si $|\lambda_i| < 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, donde λ_i es el i-ésimo valor propio de la matriz de transición F.
- En términos prácticos estabilidad significa que el proceso X_t es estacionario
- La estabilidad del proceso conduce a afirmar que $F^n X_{t-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y nos permite escribir X_t como:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} F^j V_{t-1-j}$$

Sistema de Espacio-Estado

- Los procesos lineales introducidos en el curso de Series de Tiempo que pueden ser descritos mediante la descomposición de Wold, también pueden expresarse en términos de un sistema lineal de espacio estado.
- Sin embargo, un modelo ARMA(p,q) puede tener muchas representaciones en forma de SEE. Algunas de ellas son:
- Sea $r = max\{p, q+1\}$, un proceso $Y_t \sim ARMA(p, q)$ puede representarse con:

$$F_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \phi_r & \phi_{r-1} & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix}$$

- y $G_t = \begin{bmatrix} \theta_{r-1} & \theta_{r-2} & \dots & \theta_1 & 1 \end{bmatrix}$

Sistema de Espacio-Estado

- **Representación canónica:** Sea $r = max\{p, q\}$, un proceso $Y_t \sim ARMA(p, q)$ puede representarse con:

$$F_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \phi_r & \phi_{r-1} & 0 & \dots & \phi_1 \end{bmatrix}$$

- y $G_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $H_t = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_{r-1} & \psi_r \end{bmatrix}'$ en la representación:

$$X_{t+1} = F_t X_t + H_t V_t \tag{3}$$

$$Y_t = G_t X_t + W_t \tag{4}$$

- donde, ψ_j son los coeficientes de la representación $MA(\infty)$

Sistema de Espacio-Estado

- **Ejemplo:** Obtener la representaciones dadas anteriormente en forma de SSE para un ARMA(1,2)

Sistema de Espacio-Estado

- Suponga la ecuación de volatilidad del modelo SV,

$$Y_t = \log r_t^2 = \log \sigma_t^2 + \log \epsilon_t^2 = \text{ecuación de obseervaciones}$$

- Note que Y_t se puede observar, a diferencia de la volatilidad que no es observable.Llamemos:

$$X_t = \log \sigma_t^2 = \text{estado (no observable)}$$

- Además, consideremos

$$W_t = \log \epsilon_t^2 = \text{ruido de observaciones}$$

Sistema de Espacio-Estado

- De la relación entre la observación y el estado se obtiene,

$$Y_t = X_t + W_t \quad (G = 1)$$

- Para la dinamica del sistema, podemos suponer que el estado satisface una dinámica lineal. Esta imposición se transforma en la siguiente ecuación:

$$\log \sigma_{t+1}^2 = \phi \log \sigma_t^2 + \eta_t$$

- De esta manera $F = \phi$. Quedando el sistema de espacio estado:

$$\begin{aligned} \log \sigma_{t+1}^2 &= \phi \log \sigma_t^2 + \eta_t \\ \log r_t^2 &= \log \sigma_t^2 + \log \epsilon_t^2 \end{aligned}$$

Estimación de un SEE

- Supongamos que el sistema depende de un vector de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^p$.

$$X_{t+1} = F_t(\theta)X_t + V_t \tag{5}$$
$$Y_t = G_t(\theta)X_t + W_t \tag{6}$$

- Es necesario imponer otras condiciones para estimar. Las imposiciones son:
  1. $V_t \sim N(0, Q_t) \quad iid$
  2. $W_t \sim N(0, R_t) \quad iid$
  3. $Cov(V_t, W_t) = 0$

Filtro de Kalman

- Kalman (1960), propuso una técnica para encontrar los mejores predictores lineales de X_t e Y_t de una manara altamente eficiente.
- Con la finalidad de implementarlo, definiremos la siguientes variables:
  1. $\hat{Y}_t = \mathbb{E}(Y_t | Y_{t-1}, \ldots, Y_1) \in \mathbb{R}^r$
  2. $\hat{X}_t = \mathbb{E}(X_t | Y_{t-1}, \ldots, Y_1) \in \mathbb{R}^m$
  3. $\Lambda_t = \mathbb{V}(Y_t - \hat{Y}_t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$
  4. $\Omega_t = \mathbb{V}(X_t - \hat{X}_t) \in \mathbb{R}^{r \times r}$

Filtro de Kalman

- Para el modelo de espacio-estado (5)- (6), el predictor a un paso $\hat{X}_t = P_{t-1}(X_t)$ y la matriz de covarianzas de sus errores $\Omega_t = \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)']$ son únicas y determinadas por las condiciones iniciales

$$\hat{X}_1 = P(X_1|Y_0), \qquad \Omega_1 = \mathbb{E}[(X_1 - \hat{X}_1)(X_1 - \hat{X}_1)']$$

y las recursiones, para $t = 1, \ldots, N$

$$\Lambda_t = G_t \Omega_t G_t' + R_t \tag{7}$$

$$\Theta_t = F_t \Omega_t G_t' \tag{8}$$

$$\Omega_{t+1} = F_t \Omega_t F_t' + Q_t - \Theta_t \Lambda_t^{-1} \Theta_t' \tag{9}$$

$$\nu_t = Y_t - G_t \hat{X}_t \tag{10}$$

$$\hat{X}_{t+1} = F_t \hat{X}_t + \Theta_t \Lambda_t^{-1} \nu_t \tag{11}$$

donde $\{\nu_t\}$ es llamada la secuencia de innovaciones.

.

Filtro de Kalman

- Definimos $\nu_t = Y_t - \hat{Y}_t \in \mathbb{R}^r$ como las innovaciones, ademas $\nu_t \nu_s$ son no correlacionados, $\forall s \neq t$.
- La función de log-verosimilitud puede escribirse como:
$$\log L(\theta) = l(\theta) = -\frac{1}{2}\log(det\Sigma_Y) - \frac{1}{2} Y'\Sigma_Y^{-1} Y$$
- Al ortogonalizar el proceso, gracias a las innovaciones, podemos escribir también la log-verosimilitud como,
$$l(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\log(det\Lambda_t) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\nu_t'\Lambda_t^{-1}\nu_t$$
- esta última se maximiza, y así se estiman los parámetros, siendo el estimador de máxima verosimilitud.

Filtro de Kalman

- **Nota:** Si el proceso no fuese normal, entonces aún es posible usar $l(\theta)$ y producir estimadores "quasi-máximo-verosímiles"(QMV). En particular este es el caso del modelo de S.V., ya que el error o el ruido de observación de $W_t = \log \epsilon_t^2$ generalmente no es gaussiano.

Modelos Heterocedasticos (3): Volatilidad Estocástica

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

29 de noviembre de 2024