Análisis Multivariado de Series de Tiempo

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

18 de diciembre de 2024

Contenidos

1. **Motivación**
   - Motivación
2. **Preeliminares**
   - Función de Correlación Cruzada
   - Cointegración
3. **Modelamiento Multivariado de Series de Tiempo**
   - Modelo ARIMAX
   - Modelo VAR

Motivación

Motivación

- La globalización económica y la comunicación por Internet han acelerado la integración de los mercados financieros mundiales en los últimos años. Los movimientos de precios en un mercado pueden propagarse fácil e instantáneamente a otro mercado. Por esta razón, los mercados financieros son más dependientes entre sí que nunca, y hay que considerarlos conjuntamente para comprender mejor la estructura dinámica de las finanzas mundiales.

Función de Correlación Cruzada

- Considere una serie de tiempo k-dimensional $r_t = (r_{1t}, \ldots, r_{kt})'$. Suponga demás que la serie de tiempo r_t es debilmente estacionaria. Definimos el vector de medias y la matriz de covarianza de r_t como

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}(r_t) \\ \Gamma(0) &= \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)'] \end{aligned}$$

.

- donde el i-ésimo elemento de la diagonal de $\Gamma(0)$ es la varianza de r_{it}.
- Además, el (i,j)-ésimo elemento de $\Gamma(0)$ es la covarianza entre r_{it} y r_{jt}.

Función de Correlación Cruzada

- Sea D una matriz diagonal de dimensión $k \times k$ consistente en las desviaciones estándar de r_{it} para $i = 1, \dots, k$. Es decir, $D = diag\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\}$. La matriz de correlación contemporanea (o lag-zero) de r_t es definida como.

$$\rho(0) \quad = \quad [\rho_{ij}(0)]) = D^{-1}\Gamma(0)D^{-1}$$

.

- Más especificamente, el (i,j)-ésimo elemento de $\rho(0)$ se define como,

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)}\sqrt{\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\mathbb{C}(r_{it}, r_{jt})}{\sqrt{\mathbb{V}[r_{it}]}\sqrt{\mathbb{V}[r_{jt}]}}$$

Función de Correlación Cruzada

- La matriz de correlación contemporanea es tal que,
  - $-1 \leq \rho_{ij}(0) \leq 1$
  - $\rho_{ii}(0) = 1$
  - $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$
- De esta manera, $\rho(0)$ es una matriz simétrica con diagonal unitaria..

Función de Correlación Cruzada

- Un tópico importante en el análisis multivariante de series temporales son las relaciones de adelanto-rezago entre las series componentes..
- Con este fin, las matrices de correlación cruzada se utilizan para medir la intensidad de la dependencia lineal entre las series temporales.
- La matriz de de correlación cruzada para el rezago l se define como,

$$\begin{aligned}
\rho(l) &= [\rho_{ij}(l)] \\
\rho_{ij}(l) &= \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)}\sqrt{\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\mathbb{C}(r_{i,t}, r_{j,t-l})}{\sqrt{\mathbb{V}[r_{it}]}\sqrt{\mathbb{V}[r_{jt}]}}
\end{aligned}$$

Propiedades

- Cuando $l > 0$, la correlación cruzada mide la dependencia lineal entre $r_{i,t}$ y $r_{j,t-l}$. Si, $\rho_{ij}(l) \neq 0$ decimos que la serie r_j "adelanta" a la serie r_i.
- Cuando $l < 0$, la correlación cruzada mide la dependencia lineal entre $r_{i,t}$ y $r_{j,t-l}$. Si, $\rho_{ij}(l) \neq 0$ decimos que la serie r_i "adelanta" a la serie r_t
- El i-ésimo elemento de la diagonal de la matrix $\rho(l)$ es simplemente la autocorrelación de orden l de r_i

Propiedades

- La matriz de correlación cruzada no es simétrica, de manera que $\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l)$ para $i \neq j$
- Usando la propiedad de que $\mathbb{C}(y, x) = \mathbb{C}(x, y)$ y el supuesto de estacionaridad debil tenemos que,

$$\mathbb{C}(r_{i,t}, r_{j,t-l}) = \mathbb{C}(r_{j,t-l}, r_{i,t}) = \mathbb{C}(r_{j,t}, r_{i,t+l})$$

- De manera que $\Gamma_{ij}(l) = \Gamma_{ji}(-l)$ y $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(-l)$

Matriz de Correlación Cruzada

- Sean los datos $\{r_t | t = 1, \ldots, T\}$, la matriz de covarianza cruzada $\Gamma_{ij}(l)$ puede ser estimada por,

$$\hat{\Gamma}_{ij}(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^{T} (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})', \quad l \geq 0$$

- donde $\bar{r}$ es el vector con las medias muestrales. La matriz de correlacion cruzada $\rho_{ij}(l)$ puede ser estimada por,

$$\hat{\rho}_{ij}(l) = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_{ij}(l) \hat{D}^{-1}, \quad l \geq 0$$

- donde $\hat{D}$ es la matriz diagonal con las desviaciones estándar muestrales

Cointegración

- Cuando las variables no cumplan con la condición de estacionariedad, pueden ser calculada su correlacion cruzada sol si están “cointegradas”,
- Sean dos series de tiempo integradas, decimos que ellas estan cointegradas si existe al menos una combinacion lineal entre ellas que sea estacionaria.
- Más formalmente, se dice que x_t y y_t están cointegrados si existe un parámetro α tal que,

$$u_t = y_t - \alpha x_t \tag{1}$$

es un proceso estacionario.

ARIMAX (Transfer Function Model)

- El modelo de función de transferencia general fue discutido por Box y Tiao (1975). Cuando un modelo ARIMA incluye otra serie de tiempo como variable de entrada, el modelo se denomina a veces como un modelo Arimax.
- Varios nombres diferentes se utilizan para describir modelos ARIMA con una serie de entrada independiente.
  - Distributed lag models: $DL(p) : y_t = \nu(B)x_t + \epsilon_t$.
  - Autoregressive distributed lag models: $ADL(p) : \phi(B)y_t = \nu(B)x_t + \epsilon_t$
  - ARMA model with exogenous explanatory variable ARMAX (ARIMAX): $\phi(B)y_t = \nu(B)x_t + \theta(L)\epsilon_t$
  - Rational distributed lag model RDL: $y_t = \frac{\nu(B)}{\phi(B)}x_t + \theta(L)\epsilon_t$
  - Transfer function: $y_t = \frac{\nu(B)}{\phi(B)}x_t + \epsilon_t$

Modelo VAR

- El modelo de series de tiempo multivariado más comúnmente usado es el vector autoregressive (VAR) model. Una serie de tiempo multivariada r_t sigue un modelo VAR de orden p, VAR(p) si,

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + \epsilon_t$$

- donde ϕ_0 es un vector constante k-dimensional y ϕ_i es una matriz de $k \times k$. ϵ_t es una secuencia de vectores de ruido blanco con media cero y matriz de covarianza Σ.

Modelo VAR(1) bivariado

- Considere el modelo VAR(1) definido por:

$$r_t = \Phi r_{t-1} + \epsilon_t$$

- Si $k = 2$ tenemos el modelo VAR(1) bivariado definido por:

$$r_t = \begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

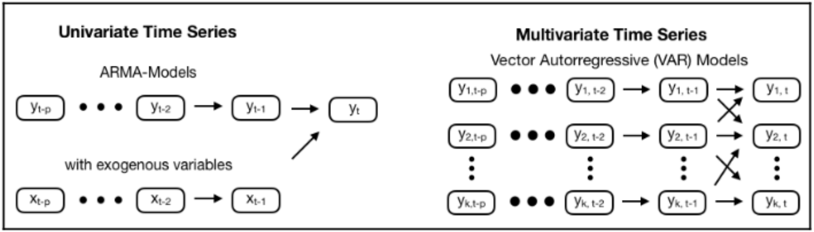
- o equivalentemente:

$$\begin{aligned} r_{1t} &= \phi_{11} r_{1,t-1} + \phi_{12} r_{2,t-1} + \epsilon_{1t} \\ r_{2t} &= \phi_{21} r_{1,t-1} + \phi_{22} r_{2,t-1} + \epsilon_{2t} \end{aligned}$$

Modelo VAR(1) bivariado

- Note que si $\phi_{12} \neq 0$ o $\phi_{21} \neq 0$ existe una relación de retroalimentación entre las dos series de tiempo. En caso contrario, las series no estan correlacionadas dinamicamente. Sin embargo, siguen estando correlacionadas contemporáneamente a menos que Σ sea una matriz diagonal.

Modelo VAR


Univariate Time Series
ARMA-Models
with exogenous variables
Multivariate Time Series
Vector Autorregressive (VAR) Models

Representación Espacio-Estado

- El modelo VAR(1) bivariado puede ser representado por un sistema espacio-estado con la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{pmatrix} r_{1,t+1} \\ r_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t} \\ r_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,t} \\ r_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t} \\ r_{2,t} \end{pmatrix} \tag{3}$$

- es decir, $F_t = \Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$, $G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_t = \Sigma$ y $R_t = 0$.

Propiedades

- **Condiciones de estacionariedad para el modelo VAR(1):** El proceso VAR(1) es estacionario si las raíces de $\det(I - \Phi B) = 0$ exceden de uno en valor absoluto.
- Dado que $\det(I - \Phi B) = 0$ si y sólo si $\det(\lambda I - \Phi) = 0$, con $\lambda = 1/B$, se deduce que la condición de estacionariedad para el modelo VAR(1) es equivalente a exigir que los valores propios de Φ sean menores que uno en valor absoluto.

Propiedades

- **Ecuaciones de Momento:** Para el modelo VAR(1), las ecuaciones matriciales de Yule-Walker se simplifican a:

$$\Gamma(k) = \Gamma(k-1)\Phi' \quad \forall k \geq 1$$

donde $\Gamma(k)$ es la matriz de covarianzas cruzadas de r_t de orden k. Note que para $k = 1$ tenemos,

$$\Gamma(1) = \Gamma(0)\Phi'$$

donde $\Gamma(0) = \Phi\Gamma(0)\Phi' + \Sigma$

Propiedades

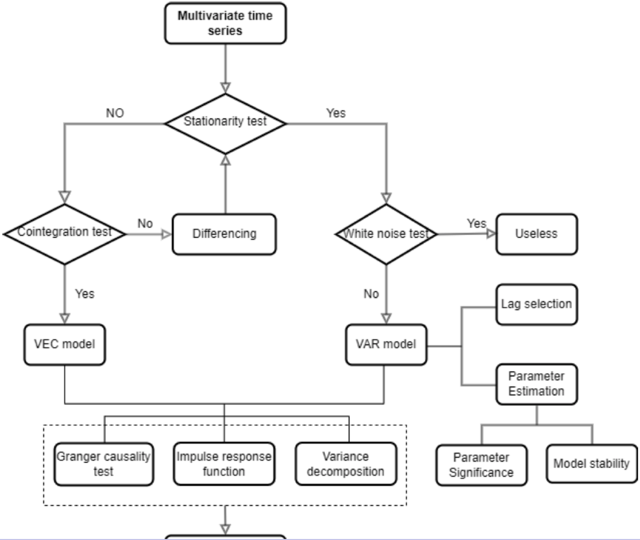
- **Ejemplo:** Considere el modelo VAR(1) bivariado($k = 2$), $r_t(I - \Phi B) = \epsilon_t$ con

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

y ϵ_t ruido blanco con media cero y matriz de covarianza $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Es el proceso r_t estacionario?
2. Obtenga la matriz de covarianzas cruzadas $\Gamma(k)$ para $k = 0, 1, \ldots, 5$.
3. Obtenga la matriz de correlaciones cruzadas $\rho(k)$ para $k = 0, 1, \ldots, 5$.

Implementación Modelo VAR



Análisis Multivariado de Series de Tiempo

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

usach

18 de diciembre de 2024