Análisis Descriptivo de Series de Tiempos Financieras

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

19 de agosto de 2025

Contenidos

Motivación

Motivación

- En el estudio de series temporales financieras, se han observado ciertas características comunes en las cuales el segundo momento condicionado varía en el tiempo y que, por tanto, no pueden ser explicadas por los modelos ARIMA. En los mercados financieros grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios, y pequeños cambios tienden ser seguidos por pequeños cambios. En otras palabras, los mercados financieros a veces son más volátil, y otras veces menos activos. Los modelos de Heterocedasticidad Condicionada tratan de modelizar la volatilidad de una serie temporal.

Motivación

Motivación

- Habitualmente, una serie financiera corresponde a un retorno de un instrumento financiero, el mis- mo puede venir dado por el cambio de la cotización de acciones (“shares”), ó tambien de los bonos (“bonus”). Los bonos podrían provenir del gobierno (“treasury Bills”);corporativos, o sea emitidos por corporaciones privadas. Otros retornos pueden ser los depósitos; las letras (hipotecarias); divisas, inversiones en otras monedas: euros, dólares, libras; también “comodities”(cobre, azúcar, etc.)..

Retornos de Activos

- Sea P_t: El precio de un activo.
- Se define el retorno simple a un periodo: desde la fecha $t-1$ a t como,
$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$
- También es posible obtener el retorno a través de: $R_t = \log P_t - \log P_{t-1}$, que es la más usada.
- Mientras que el retorno simple a multiples periodos: desde la fecha $t-k$ a t se define como,
$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j})$$

Retornos de Activos

- Si el activo es mantenido por k años, el retorno anualizado se define como:

$$\mathbb{A}[R_t(k)] = \left[\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})\right]^{1/k} - 1 \approx k^{-1}\sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}$$

- Retorno compuestos contínuamente:

$$r_t = ln(1+R_t)$$

- Para múltiples períodos tenemos:

$$r_t(k) = r_t + r_{t-1} + \ldots + + r_{t-k+1}$$

Características de las Series Financieras

- Las series financieras suelen presentar las siguientes características, generalmente conocidos como los hechos estilizados (stylized-facts).
  1. **Ausencia de autocorrelación significativa:** Las series financieras (retornos), exhiben bajo nivel de autocorrelación, por lo cual tienen bajo nivel de predicción. Mientras que para los cuadrados de los valores de la serie está altamente correlacionado. A veces, estas correlaciones son siempre positivas.

Características de las Series Financieras

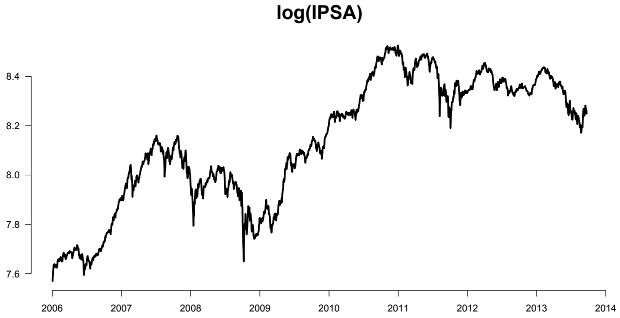
1. **Distribuciones con colas pesadas:** Es importante destacar que por lo general las series financieras tienen mucho más kurtosis que la de un ruido blanco gaussiano.
2. **Agrupamiento de la volatilidad:** Se observa que la volatilidad es persistente y puede ser alta para ciertos periodos de tiempo y baja para otros. Esta característica se puede ver reflejada en las autocorrelaciones de la serie al cuadrado significativamente distintas de cero.

Ejemplo

- La siguiente serie contiene el Indice diario de precio selectivo de acciones (IPSA) desde Enero 2006 hasta Septiembre 2013. Como la serie no es estacionaria, se diferencia el logaritmo de la serie obteniéndose los retornos, los cuales si son estacionarios.

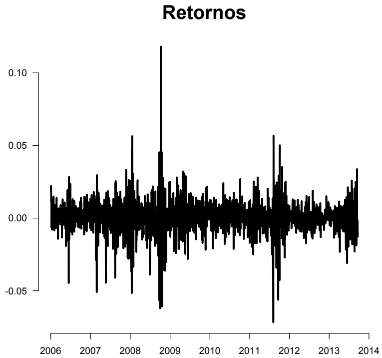
Ejemplo

- La siguiente serie contiene el Indice diario de precio selectivo de acciones (IPSA) desde Enero 2006 hasta Septiembre 2013. Como la serie no es estacionaria, se diferencia el logaritmo de la serie obteniéndose los retornos, los cuales si son estacionarios.

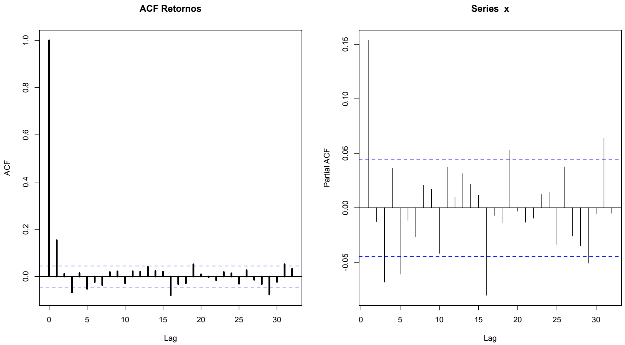


Ejemplo

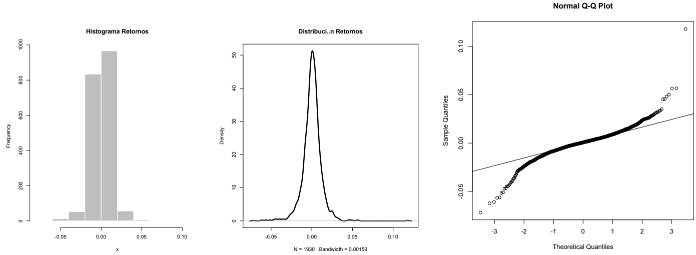
- La siguiente serie contiene el Indice diario de precio selectivo de acciones (IPSA) desde Enero 2006 hasta Septiembre 2013. Como la serie no es estacionaria, se diferencia el logaritmo de la serie obteniéndose los retornos, los cuales si son estacionarios.



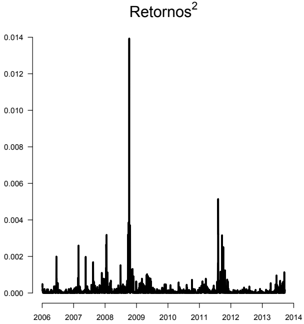
Ejemplo

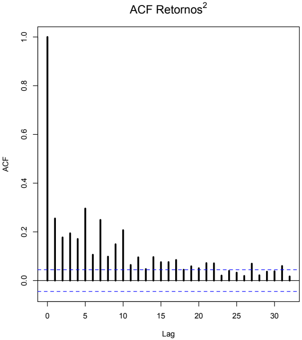


Ejemplo


Histograma Retornos
Frequency
x
Distribuci..n Retornos
Density
N = 1930 Bandwidth = 0.00159
Normal Q-Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles

Ejemplo


Retornos^2
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014


ACF Retornos^2
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20
25
30
Lag

Cointegración

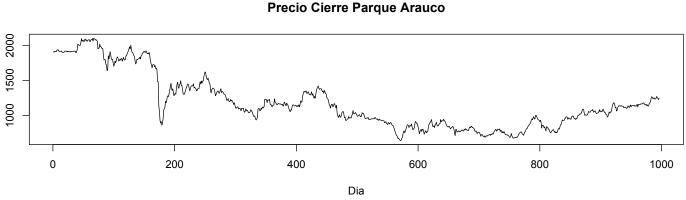
- Dos procesos integrados x_t y y_t se dicen cointegrados si existe un parámetro α tal que:

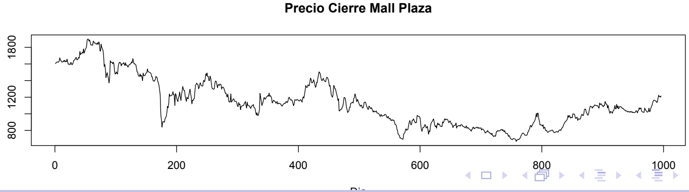
$$u_t = y_t - \alpha x_t \tag{1}$$

  es un proceso estacionario.
- Por lo tanto, una forma de chequear si dos series temporales están cointegradas es usando un test de raíz unitaria.
- Si rechazamos la raíz unitaria en u_t, entonces x_t y y_t están cointegradas. Si no rechazamos, x_t y y_t no están cointegradas
- El parámetro α se conoce como el parámetro de cointegración.
- El parámetro de cointegración se puede estimar usando Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

Aplicación en Series de Tiempo Financieras

- Serie del Precio de cierre diario de las acciones de Parque Arauco y Mall Plaza en la Bolsa de Santiago observado entre el 3 jul 2019 y el 29 jun 2023.





Cointegración

- Antes de implementar la prueba de cointegración de Engle y Granger debemos chequear que ambas series son integradas:

```
adfTest(data, lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.2246
adfTest(data2, lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.326
```

Cointegración

- Antes de implementar la prueba de cointegración de Engle y Granger debemos chequear que ambas series son integradas:

```
adfTest(data, lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.2246
adfTest(data2, lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.326
```

- Como ambas series son integradas, entonces revisamos si los residuos de una regresión lineal entre ambas series es un proceso estacionario:

```
model=lm(data~data2)
adfTest(residuals(model), lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.01
```

Test de Causalidad de Granger

- Para estudiar la causalidad de Granger en R se debe usar el siguiente código:

  ```
  grangertest(formula, order, data)
  ```

- Si dos series temporales, x_t y y_t, están cointegradas, debe existir causalidad de Granger de x_t a y_t, de y_t a x_t, o en ambos sentidos.
- La presencia de causalidad de Granger en una o ambas direcciones entre x_t y y_t no implica necesariamente que las series están cointegradas.

Test de Causalidad de Granger

- En nuestro ejemplo el resultado fue el siguiente:

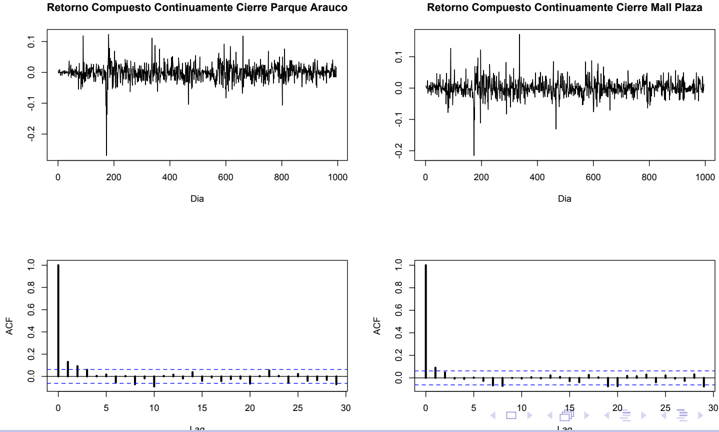
```
grangertest(data ~ data2,order=1,multidata)
Granger causality test

Model 1: data ~ Lags(data, 1:1) + Lags(data2, 1:1)
Model 2: data ~ Lags(data, 1:1)
  Res.Df Df      F Pr(>F)
1    992
2    993 -1 1.5171 0.2183
grangertest(data2 ~ data,order=1,multidata)
Granger causality test

Model 1: data2 ~ Lags(data2, 1:1) + Lags(data, 1:1)
Model 2: data2 ~ Lags(data2, 1:1)
  Res.Df Df      F   Pr(>F)
```

Retornos

- Como la series de precios son integradas, intentaremos modelar su relación a partir de los retornos compuestos continuamente:



Test de Causalidad de Granger

- En el caso de los retornos compuestos continuamente notamos que la causalidad existe en ambas direcciones:

```
adfTest(rtn, lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.01
adfTest(rtn2, lags = 1, type = c("nc"))
  P VALUE:
    0.01
grangertest(rtn ~ rtn2,order=1)
  Res.Df Df     F    Pr(>F)
1    991
2    992 -1 14.46 0.0001519 ***
  Res.Df Df      F    Pr(>F)
1    991
2    992 -1 30.999 3.324e-08 ***
```

Función de Correlación Cruzada

- Considere una serie de tiempo k-dimensional $r_t = (r_{1t}, \ldots, r_{kt})'$. Suponga demás que la serie de tiempo r_t es debilmente estacionaria. Definimos el vector de medias y la matriz de covarianza de r_t como

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}(r_t) \\ \Gamma(0) &= \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)'] \end{aligned}$$

.

- donde el i-ésimo elemento de la diagonal de $\Gamma(0)$ es la varianza de r_{it}.
- Además, el (i,j)-ésimo elemento de $\Gamma(0)$ es la covarianza entre r_{it} y r_{jt}.

Función de Correlación Cruzada

- Sea D una matriz diagonal de dimensión $k \times k$ consistente en las desviaciones estándar de r_{it} para $i = 1, \ldots, k$. Es decir, $D = diag\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \ldots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\}$. La matriz de correlación contemporanea (o lag-zero) de r_t es definida como.

$$\rho(0) \quad = \quad [\rho_{ij}(0)]) = D^{-1}\Gamma(0)D^{-1}$$

.

- Más especificamente, el (i,j)-ésimo elemento de $\rho(0)$ se define como,

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)}\sqrt{\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\mathbb{C}(r_{it}, r_{jt})}{\sqrt{\mathbb{V}[r_{it}]}\sqrt{\mathbb{V}[r_{jt}]}}$$

Función de Correlación Cruzada

- La matriz de correlación contemporanea es tal que,
  - $-1 \leq \rho_{ij}(0) \leq 1$
  - $\rho_{ii}(0) = 1$
  - $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$
- De esta manera, $\rho(0)$ es una matriz simétrica con diagonal unitaria..

Función de Correlación Cruzada

- Un tópico importante en el análisis multivariante de series temporales son las relaciones de adelanto-rezago entre las series componentes..
- Con este fin, las matrices de correlación cruzada se utilizan para medir la intensidad de la dependencia lineal entre las series temporales.
- La matriz de de correlación cruzada para el rezago l se define como,

$$\begin{aligned} \rho(l) &= [\rho_{ij}(l)] \\ \rho_{ij}(l) &= \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)}\sqrt{\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\mathbb{C}(r_{i,t}, r_{j,t-l})}{\sqrt{\mathbb{V}[r_{it}]}\sqrt{\mathbb{V}[r_{jt}]}} \end{aligned}$$

Propiedades

- Cuando $l > 0$, la correlación cruzada mide la dependencia lineal entre $r_{i,t}$ y $r_{j,t-l}$. Si, $\rho_{ij}(l) \neq 0$ decimos que la serie r_j "adelanta" a la serie r_i.
- Cuando $l < 0$, la correlación cruzada mide la dependencia lineal entre $r_{i,t}$ y $r_{j,t-l}$. Si, $\rho_{ij}(l) \neq 0$ decimos que la serie r_i "adelanta" a la serie r_t
- El i-ésimo elemento de la diagonal de la matrix $\rho(l)$ es simplemente la autocorrelación de orden l de r_i

Propiedades

- La matriz de correlación cruzada no es simétrica, de manera que $\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l)$ para $i \neq j$
- Usando la propiedad de que $\mathbb{C}(y, x) = \mathbb{C}(x, y)$ y el supuesto de estacionaridad debil tenemos que,

$$\mathbb{C}(r_{i,t}, r_{j,t-l}) = \mathbb{C}(r_{j,t-l}, r_{i,t}) = \mathbb{C}(r_{j,t}, r_{i,t+l})$$

- De manera que $\Gamma_{ij}(l) = \Gamma_{ji}(-l)$ y $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(-l)$

Matriz de Correlación Cruzada

- Sean los datos $\{r_t | t = 1, \ldots, T\}$, la matriz de covarianza cruzada $\Gamma_{ij}(l)$ puede ser estimada por,

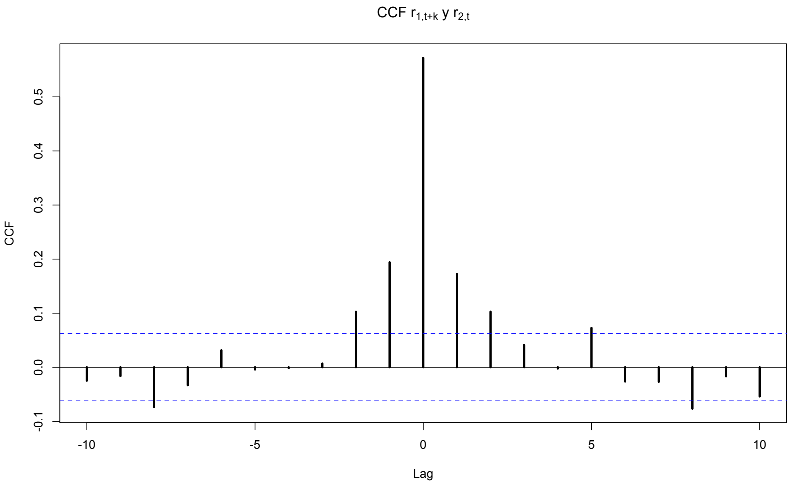
$$\hat{\Gamma}_{ij}(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^{T} (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})', \quad l \geq 0$$

- donde $\bar{r}$ es el vector con las medias muestrales. La matriz de correlacion cruzada $\rho_{ij}(l)$ puede ser estimada por,

$$\hat{\rho}_{ij}(l) = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_{ij}(l) \hat{D}^{-1}, \quad l \geq 0$$

- donde $\hat{D}$ es la matriz diagonal con las desviaciones estándar muestrales

Función de Correlación Cruzada



Análisis Descriptivo de Series de Tiempos Financieras

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

19 de agosto de 2025