Modelos Heterocedasticos: ARCH

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

usach

20 de octubre de 2024

Contenidos

Motivación

Motivación

- En este curso daremos privilegio a las series financieras, las cuales son modeladas mediante procesos ARCH (1982) debido a Engle, y GARCH (1986) debido a Bollerslev. También encontraremos los modelos SV (Volatilidad estocástica), debido a Harvey. A partir de estos se generan otros modelos tales como el GARCH-M, I-GARCH, etc. El ajuste de modelos a serie de tiempo se aplica diariamente.

Motivación

Motivación

- Los procesos ARIMA estudiados en el curso anterior, son modelos sencillos de implementar, pero tienen la limitación de que, aunque asumen que la esperanza condicionada varía en el tiempo, tanto la varianza marginal como la condicionada son constantes. Por ejemplo, consideremos el proceso AR.

$$x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2), \quad |\phi| < 1$$

- Note que la media no condicionada de x_t es cero, $\mathbb{E}(x_t) = 0$, mientras que la media condicionada es ϕx_{t-1}. Además, la varianza marginal es $\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$, mientras que la varianza condicionada es σ^2.

Motivación

Motivación

- En el estudio de series temporales financieras, se han observado ciertas características comunes en las cuales el segundo momento condicionado varía en el tiempo y que, por tanto, no pueden ser explicadas por los modelos ARIMA. En los mercados financieros grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios, y pequeños cambios tienden ser seguidos por pequeños cambios. En otras palabras, los mercados financieros a veces son más volátil, y otras veces menos activos. Los modelos de Heterocedasticidad Condicionada tratan de modelizar la volatilidad de una serie temporal.

Motivación

Motivación

- Habitualmente, una serie financiera corresponde a un retorno de un instrumento financiero, el mis- mo puede venir dado por el cambio de la cotización de acciones (“shares”), ó tambien de los bonos (“bonus”). Los bonos podrían provenir del gobierno (“treasury Bills”);corporativos, o sea emitidos por corporaciones privadas. Otros retornos pueden ser los depósitos; las letras (hipotecarias); divisas, inversiones en otras monedas: euros, dólares, libras; también “comodities”(cobre, azúcar, etc.)..

Retornos de Activos

- Sea P_t: El precio de un activo.
- Se define el retorno simple a un periodo: desde la fecha $t-1$ a t como,
$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$
- También es posible obtener el retorno a través de: $R_t = \log P_t - \log P_{t-1}$, que es la más usada.
- Mientras que el retorno simple a multiples periodos: desde la fecha $t-k$ a t se define como,
$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1}(1 + R_{t-j})$$

Retornos de Activos

- Si el activo es mantenido por k años, el retorno anualizado se define como:

$$\mathbb{A}[R_t(k)] = \left[\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})\right]^{1/k} - 1 \approx k^{-1}\sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}$$

- Retorno compuestos contínuamente:

$$r_t = ln(1+R_t)$$

- Para múltiples períodos tenemos:

$$r_t(k) = r_t + r_{t-1} + \ldots + + r_{t-k+1}$$

Características de las Series Financieras

- Las series financieras suelen presentar las siguientes características, generalmente conocidos como los hechos estilizados (stylized-facts).
    1. **Ausencia de autocorrelación significativa:** Las series financieras (retornos), exhiben bajo nivel de autocorrelación, por lo cual tienen bajo nivel de predicción. Mientras que para los cuadrados de los valores de la serie está altamente correlacionado. A veces, estas correlaciones son siempre positivas.

Características de las Series Financieras

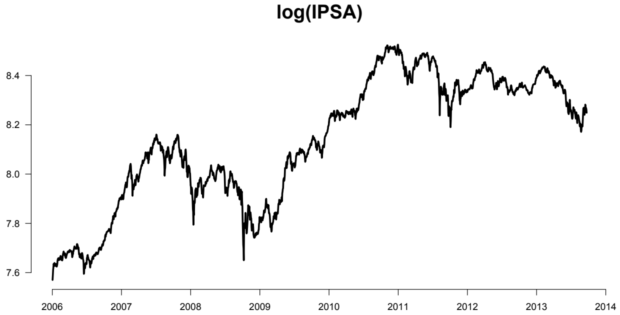
1. **Distribuciones con colas pesadas:** Es importante destacar que por lo general las series financieras tienen mucho más kurtosis que la de un ruido blanco gaussiano.
2. **Agrupamiento de la volatilidad:** Se observa que la volatilidad es persistente y puede ser alta para ciertos periodos de tiempo y baja para otros. Esta característica se puede ver reflejada en las autocorrelaciones de la serie al cuadrado significativamente distintas de cero.

Ejemplo

- La siguiente serie contiene el Indice diario de precio selectivo de acciones (IPSA) desde Enero 2006 hasta Septiembre 2013. Como la serie no es estacionaria, se diferencia el logaritmo de la serie obteniéndose los retornos, los cuales si son estacionarios.

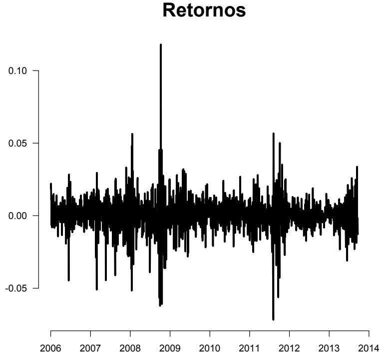
Ejemplo

- La siguiente serie contiene el Indice diario de precio selectivo de acciones (IPSA) desde Enero 2006 hasta Septiembre 2013. Como la serie no es estacionaria, se diferencia el logaritmo de la serie obteniéndose los retornos, los cuales si son estacionarios.

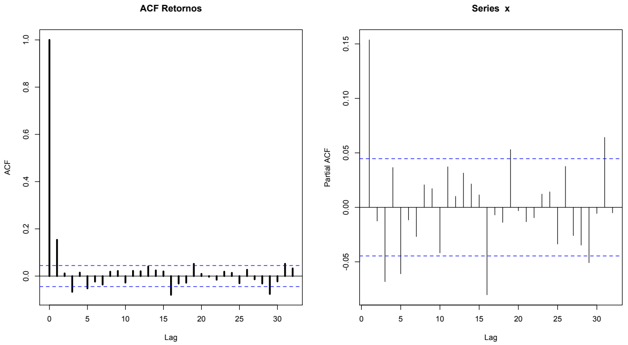


Ejemplo

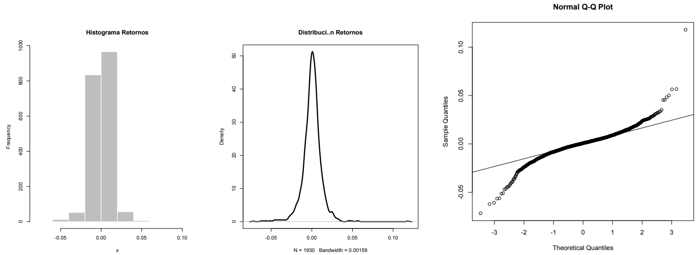
- La siguiente serie contiene el Indice diario de precio selectivo de acciones (IPSA) desde Enero 2006 hasta Septiembre 2013. Como la serie no es estacionaria, se diferencia el logaritmo de la serie obteniéndose los retornos, los cuales si son estacionarios.



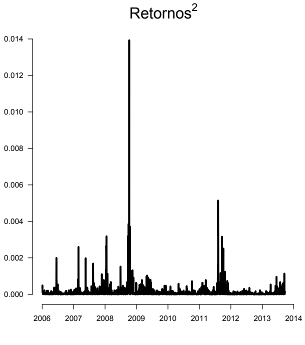
Ejemplo



Ejemplo


Histograma Retornos
Frequency
x
Distribuci..n Retornos
Density
N = 1930 Bandwidth = 0.00159
Normal Q-Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles

Ejemplo


Retornos^2
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014
ACF Retornos^2
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0 5 10 15 20 25 30
Lag

Características de las Series Financieras

- Los modelos heterocedásticos suponen que la varianza condicionada a los valores pasados de la serie (σ^2) no es constante en el tiempo. En la literatura (σ^2) se conoce como volatilidad. Los diversos modelos de volatilidad que existen se diferencian entre sí en la forma en que se modela la evolución de (σ^2). Los modelos de heterocedasticidad condicionada se pueden clasificar en dos grandes categorías:
  - **Modelos ARCH:** los cuales modelan (σ^2) como una función deterministica.
  - **Modelos de volatilidad estocástica:** los cuales modelan la volatilidad mediante una ecuación estocástica.

Formulación

- Robert F. Engle (1982) Econometrista estadounidense. Profesor del Departamento de Economía de la Universidad de California, San Diego. Desarrolló junto a Granger el concepto de cointegración e inventó los procesos ARCH. Es uno de los creadores del área de estudio de la economía financiera, su trabajo influye en muchas áreas del análisis de series temporales y la econometría. En 2003 recibió el Premio Novel de Economía.

Formulación

- Los modelos ARCH, o modelos autorregresivos con heterocedásticidad condicional fueron introducidos con el objetivo de estimar la varianza de la inflación. La ídea básica es que el retorno no está correlacionado serialmente, pero la volatilidad depende de los retornos pasados por medio de una función cuadrática.
- **Definición:** Un modelo ARCH(p) se define como:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p r_{t-p}^2 \end{aligned}$$

.

- donde ϵ_t *iid* $N(0,1)$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i > 0$:
- Además, se requiere que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$ para que el proceso y_t sea estacionario.

Formulación

Propiedades

- Para estudiar algunas de las propiedades de este modelo consideraremos el caso especial $ARCH(1)$:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 \end{aligned}$$

.

- El cual cumple con las siguientes propiedades
  - $\mathbb{E}(r_t) = 0 \quad \forall t$
  - $\mathbb{V}(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad con \quad 0 \leq \alpha_1 < 1$

Formulación

Propiedades

- $Cov(r_t, r_{t+k}) = \gamma_r(k) = 0, \quad k > 1$
- La curtosis de r_t es $K = \frac{\mu_4}{[\mathbb{V}(r_t)]^2} > 3$, donde $\mu_4 = \mathbb{E}(r_t)^4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$
- La funcion de autocorrelacion de los cuadrados esta dada por $\gamma_{r^2}(k) = \alpha_1^k, \quad k > 0$

Formulación

Propiedades

- **Observacion 1:** Se puede demostrar que para un modelo ARCH(p) la varianza es, (Tarea)
$$\mathbb{V}[r_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}$$
- **Observacion 2:** Se puede demostrar que para un modelo ARCH(p) (Tarea)
$$r_t^2 = \eta_t + \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j r_{t-j}^2$$

Representacion de Volterra

- La forma general de un proceso estacionario no lineal en la media se obtiene mediante la llamada representación de Volterra. La cual es una generalización de la representación $MA(\infty)$ de Wold para procesos lineales estables para procesos lineales y se escribe:

$$x_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \eta_i \epsilon_{t-i} + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \eta_{ij} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j} + \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} \eta_{ijk} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j} \epsilon_{t-k} + \dots$$

Representacion de Volterra

Representacion causal de un proceso ARCH(1)

- **Ejemplo:** Muestre que el proceso ARCH(1) sigue la siguiente representación

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=0}^{n} \alpha_1^j \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \ldots \epsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^{n+1} \epsilon_t^2 \ldots \epsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2$$

- Esta representación es conocida como la expansión de Volterra para el proceso $\{r_t^2\}$

Identificacion

- La idea es verificar si la serie tiene características estilizadas, para ello se recomienda:
  1. **Graficar la serie:**Para ello la serie debe ser estacionaria. Es recomendable tomar logaritmo en series financieras, es usual tomar esta transformación.
  2. **Graficar el cuadrado de la serie original:** Desde el punto de vista financiero, los cuadrados de la serie indica la volatilidad de la serie (esperamos ver en r_t^2 períodos de baja y alta volatilidad).
  3. **Autocorrelación Serial:** Graficar las ACF de la serie original y la de sus cuadrados. Deberá verificarse que ninguna correlación es significativa para la serie original, pero si están correlacionados sus cuadrados.

Identificacion

1. **Autocorrelación Parcial:** A modo de ejemplo si el modelo que se tiene fuese un ARCH(1) se esperaría que la PACF de los cuadrados de la serie presente un pick fuera de la banda de confianza con valor no superior a $0{,}57 \approx 1/3$. Generalizando a un modelo ARCH(p), se esperarían p valores fuera de la banda de confianza.
2. **Histograma:** Para la serie de los retornos, recordar que esta tiene colas pesadas y si $\alpha_1 \approx 0$ las colas son más livianas que en el caso cuando $\alpha_1 \approx 0{,}57$, respeto a una normal estándard.
3. **Gráfica de normalidad:** Se esperaría en el gráfico de cuantil-cuantil un alejamiento de las observaciones de la bisectriz, ello indicaría que las colas son distintas a una normal.

Identificacion

1. **Test de blancura:** Debemos tener presente que los residuos de nuestro modelo deben cumplir con ser R.B., esto es posible de observar mediante la FAC, donde se testea $H_0 : \rho(k) = 0 \; \forall \; k \leq 1$ bajo la hipótesis nula es y_t es R.B. de segundo orden. Se aconseja utilizar el test de Box-Ljung (1978) $Q_y = T(T+2)\sum_{j=1}^{h} \frac{\hat{\rho}^2(j)}{n-j}$, donde $Q_y \sim \xi^2_{h-p-q}$. La extensión de este test es dada por McLeo-Li(1983) para los cuadrados de la serie..

Estimacion de los parametros ARCH(1)

- La estimacion de α_0 y α_1 esta dada por la estimacion maximo verosimil. La distribucion condicional de los retornos $r_1, r_2, \ldots, r_T$ es,

$$L(\alpha_0, \alpha_1 | r_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{\alpha_0,\alpha_1}(r_t | r_{t-1}),$$

- donde f_{α_0,α_1} es la funcion de densidad normal condicional. Escribios la funcion de log verosimilitud $l(\alpha_0, \alpha_1 | r_1)$ y tomando las derivadas parciales respecto a α_0 y α_1 tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial l(\alpha_0,\alpha_1)}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial l(\alpha_0,\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} = \sum_{t=2}^{T} \begin{pmatrix} 1 \\ r_{t-1}^2 \end{pmatrix} \frac{\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 - r_t^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)}$$

Estimacion de los parametros ARCH(1)

- Igualando la ecuación anterior a cero y evaluando en los estimadores de máxima verosimilitud obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_0 + \left(\sum_{t=2}^{T} r_{t-1}^2\right)\hat{\alpha}_1 &= \sum_{t=2}^{T} r_t^2 \\
\left(\sum_{t=2}^{T} r_{t-1}^2\right)\hat{\alpha}_0 + \left(\sum_{t=2}^{T} r_{t-1}^4\right)\hat{\alpha}_1 &= 0
\end{aligned}
$$

- obtenemos los estimadores para α_0 y α_1 a extensión del resultado de obtiene al considerar que la volatilidad σ_t^2 depende de un mayor numero de observaciones pasadas $r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \ldots, r_{t-p}^2$, para $p < t$. La variabilidad del modelo de la ecuacion puede ser estimada como,
$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 r_{t-1}^2 + \ldots + \hat{\alpha}_p r_{t-p}^2$$
- Similarmente, en el modelo $ARCH(1)$ necesitaremos resolver un sistema de p x p ecuaciones.

Prediccion en modelos ARCH(p)

- Las predicciones de la volatilidad σ_t^2, en un modelo ARCH(p) se pueden obtener de manera recursiva dados los datos hasta hoy $\{r_t, r_{t-1}, \ldots\}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{P} \hat{\alpha}_j r_{t-j}^2 \\
\hat{\sigma}_{n+h}^2 &= \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{P} \hat{\alpha}_j r_{n+h-j}^2 \\
\hat{\sigma}_{n+h}^2 &= \mathbb{E}\left(\hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{P} \hat{\alpha}_j r_{n+h-j}^2 | \mathcal{F}_n\right) \\
&= \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{P} \hat{\alpha}_j \mathbb{E}\left(r_{n+h-j}^2 | \mathcal{F}_n\right)
\end{aligned}
$$

Prediccion en modelos ARCH(p)

- Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2_{n+1} &= \sigma^2_{n+1} \\
\hat{\sigma}^2_{n+2} &= \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0 + \alpha_1 r_n^2] \sum_{j=2}^{p} \alpha_j r^2_{n+2-j}
\end{aligned}
$$

- Y asi sucesivamente,

Estimacion de los parametros ARCH(1)

Debilidades de los Modelos ARCH

- El modelo asume que los shocks positivos y los negativos tienen el mismo efecto sobre la volatilidad ya que esta depende del cuadrado de los shocks pasados.
- Los modelos ARCH son bastante restrictivos y debe imponer condiciones sobre los parametros, por lo cual el proceso de estimacion es mas costoso.
- Generalmente, los modelos ARCH requieren un numero elevado de retardos para describir el proceso de volatilidad.
- Los modelos ARCH consiguen describir el comportamiento de la varianza condicionada, pero no explican las causas de dicho comportamiento.

Aplicacion en R

- Para poder implementar el modelo ARCH en R se debe utilizar el paquete fGarch de R.
- Dentro del paquete estan las funciones garchSpec y garchSim las cuales nos permiten simular una serie de retornos a partir de los parametros,
  - **alpha** = vector de coeficientes.
  - **omega** = el coeficiente constante de la ecuacion de la varianza (ie, α_0).
- Bajo el modelo definido anteriormente,

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p r_{t-p}^2 \end{aligned}$$

.

- omega=α_0 y alpha=$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$

Aplicacion en R

- Como ejemplo simulemos un proceso ARCH(1) de tamaño 2000 con $\alpha_1 = 0{,}7$ y $\alpha_0 = 0{,}3$.

```
llibrary(fGarch)
set.seed(2000)
spec = garchSpec(model = list(omega= 0.3,alpha = c(0.7), beta = 0))

x=garchSim(spec, n = 2000)
```

Aplicacion en R

- Como ejemplo simulemos un proceso ARCH(1) de tamaño 2000 con $\alpha_1 = 0{,}7$ y $\alpha_0 = 0{,}3$.

```
llibrary(fGarch)
set.seed(2000)
spec = garchSpec(model = list(omega= 0.3,alpha = c(0.7), beta = 0))

x=garchSim(spec, n = 2000)
```

```
GMT
                  garch
2010-01-28  0.51989802
2010-01-29 -0.26160693
2010-01-30 -0.08262140
2010-01-31  0.20900386
2010-02-01  0.93882301
2010-02-02  0.07066962
```

Aplicacion en R

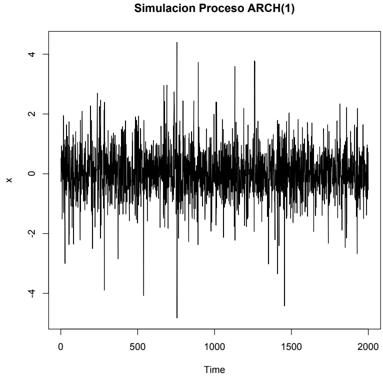
- Para ver la serie simulada hacemos.

```
ts.plot(x,main='Simulacion Proceso ARCH(1)')
```

Aplicacion en R

- Para ver la serie simulada hacemos.

```
ts.plot(x,main='Simulacion Proceso ARCH(1)')
```



Aplicacion en R

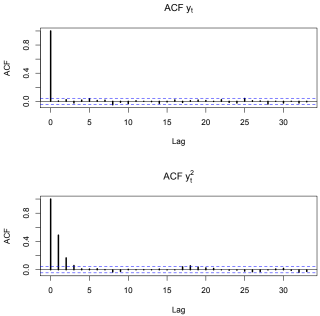
- Graficamos los ACF de la serie de retornos y retornos al cuadrado.

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(x, lwd=3, main ="")
title(expression(paste("ACF ", y[t])))
acf(x^2,main="", lwd=3)
title(expression(paste("ACF ", y[t]^2)))
```

Aplicacion en R

- Graficamos los ACF de la serie de retornos y retornos al cuadrado.

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(x, lwd=3, main ="")
title(expression(paste("ACF ", y[t])))
acf(x^2,main="", lwd=3)
title(expression(paste("ACF ", y[t]^2)))
```

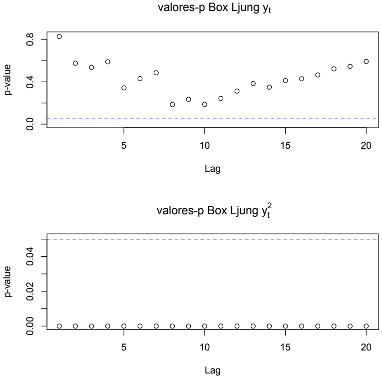


Aplicacion en R

- Podemos ver la autocorrelacion muestral a partir del test de Box-Ljung a partir de la siguiente funcion,

```
Box.Test = function(x, lag = 1, main = "p values for Ljung-Box statistic")
{
B<-vector("numeric")
for(i in 1:lag){
B[i]<-Box.test(x, lag = i, type = "Ljung-Box")$p.value
}
A<-matrix(cbind(c(1:lag),B), nrow = lag, ncol = 2, byrow=F,
dimnames = list(NULL, c("lag", "p.value")))
plot(A[,1], A[,2], ylim = c(0, max(0.051,(max(A[,2])+.01))),
ylab = "p-value", xlab = "Lag", main = main)
abline(0.05, 0, col = 4, lty = 2)
return(A)
}
par(mfrow=c(1,2))
Box.Test(x,20, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ", y[t])))
Box.Test(x^2,20, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ", y[t]^2)))
```

Aplicacion en R



Aplicacion en R

- Ajustamos un modelo ARCH a nuestros datos a partir de la funcion garchFit

```
library(fGarch)

fit1 = garchFit(formula = ~ garch(1, 0), data = x, include.mean =
FALSE, trace=F)
summary(fit1)
```

- Los parametros estimados y su significancia son los siguientes,

```
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega    0.31557     0.01628    19.39   <2e-16 ***
alpha1   0.60275     0.04754    12.68   <2e-16 ***
```

- La funcion muestra los indices de bondad de ajuste como,

```
Information Criterion Statistics:
     AIC      BIC      SIC     HQIC
2.284151 2.289752 2.284149 2.286207
```

Aplicacion en R

- Ademas, muestra algunos indicadores respecto a la presencia de correlacion en los residuos

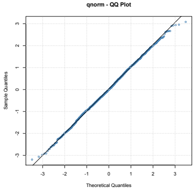
```
1Standardised Residuals Tests:
                                   Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  0.5616111 0.7551752
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9992355 0.598382
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  21.47118  0.01803733
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  25.19204  0.04742305
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  27.61337  0.1188723
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  9.848418  0.4538914
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  12.45304  0.6444645
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  15.24347  0.7623105
 LM Arch Test       R    TR^2   10.31521  0.5883289
```

Aplicacion en R

- Podemos mostrar graficamente la calidad de nuestro modelo utilizando el comando plot(fit) a partir del cual se entrega el siguiente menu de opciones

```
Make a plot selection (or 0 to exit):

 1:   Time Series                               2:   Conditional SD
 4:   ACF of Observations                       5:   ACF of Squared Observations
 7:   Residuals                                 8:   Conditional SDs
10:   ACF of Standardized Residuals            11:   ACF of Squared Standardized Residuals      1
13:   QQ-Plot of Standardized Residuals
```

- Por ejemplo, si seleccionamos la opcion 13, verificamos que los residuos de este modelo son normales,

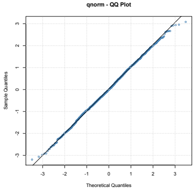


Aplicacion en R

- Podemos mostrar graficamente la calidad de nuestro modelo utilizando el comando plot(fit) a partir del cual se entrega el siguiente menu de opciones

```
Make a plot selection (or 0 to exit):

 1:   Time Series                               2:   Conditional SD
 4:   ACF of Observations                       5:   ACF of Squared Observations
 7:   Residuals                                 8:   Conditional SDs
10:   ACF of Standardized Residuals            11:   ACF of Squared Standardized Residuals      1
13:   QQ-Plot of Standardized Residuals
```

- Por ejemplo, si seleccionamos la opcion 13, verificamos que los residuos de este modelo son normales,



Aplicacion en R

- Posteriormente, ajustamos un segundo modelo ARCH definiendo que la distribucion condicional ya no sea normal si no T-Student.

```
library(fGarch)

fit2 = garchFit(formula = ~ garch(1, 0), data = x, cond.dist="std",
include.mean = FALSE, trace=F)
summary(fit2)
```

- Los parametros estimados y su significancia son los siguientes,

```
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega    0.33392     0.01994   16.750  < 2e-16 ***
alpha1   0.63494     0.05716   11.109  < 2e-16 ***
shape   10.00000     1.35768    7.366 1.77e-13 ***
```

- La funcion muestra los indices de bondad de ajuste como,

```
Information Criterion Statistics:
     AIC      BIC      SIC     HQIC
2.298499 2.306901 2.298495 2.301584
```

Aplicacion en R

- Los estadisticos para este modelo son los siguientes,

```
Standardised Residuals Tests:
                                    Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  0.5617404 0.7551263
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9992345 0.5970684
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  21.4637   0.01808239
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  25.17481  0.04764448
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  27.59764  0.1192714
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  9.913048  0.4481548
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  12.52246  0.6391301
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  15.30643  0.7586135
 LM Arch Test       R    TR^2   10.38861  0.5819081
```

Aplicacion en R

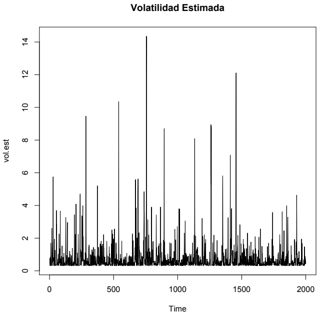
- Para obtener la volatilidad estimada por el modelo se utiliza el comando

```
vol.est = fit1@h.t

vol.est[1000]
ts.plot(vol.est,main='Volatilidad Estimada')
```

Aplicacion en R

- Para obtener la volatilidad estimada por el modelo se utiliza el comando

```
vol.est = fit1@h.t

vol.est[1000]
ts.plot(vol.est,main='Volatilidad Estimada')
```



Aplicacion en R

- Para realizar predicciones a h pasos para nuestro modelo utilizamos el comando predict,

```
pred = predict(fit1,12)
sigma.hat = fit1@h.t
pred.sigma = pred[,3]
pred.sigma
```

Aplicacion en R

- Para realizar predicciones a h pasos para nuestro modelo utilizamos el comando predict,

```
pred = predict(fit1,12)
sigma.hat = fit1@h.t
pred.sigma = pred[,3]
pred.sigma
```

```
  meanForecast meanError standardDeviation
1            0 0.8625309         0.8625309
2            0 0.9109252         0.9109252
3            0 0.9305176         0.9305176
4            0 0.9386316         0.9386316
5            0 0.9420216         0.9420216
```

Aplicacion en R

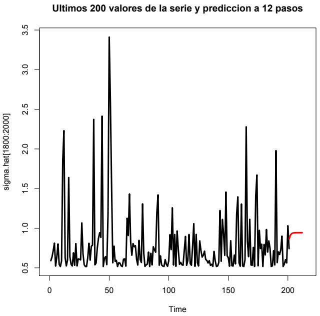
- Graficamos la volatilidad predicha,

```
ts.plot(sigma.hat[1800:2000],lwd=3, xlim=c(0,215))
lines(201:212,pred.sigma, col="red", lwd=3)
title( "Ultimos 200 valores de la serie y prediccion a 12 pasos")
```

Aplicacion en R

- Graficamos la volatilidad predicha,

```
ts.plot(sigma.hat[1800:2000],lwd=3, xlim=c(0,215))
lines(201:212,pred.sigma, col="red", lwd=3)
title( "Ultimos 200 valores de la serie y prediccion a 12 pasos")
```



Ejemplo IPSA

- Cargamos la base de datos IPSA

```
datos = read.table(file.choose(),header=T)
attach(datos)
ipsa = na.omit(datos[,1])
n = length(ipsa)
y = log(ipsa)
## Retornos:
x = diff(y)
## Retornos^2
xx = x^2
```

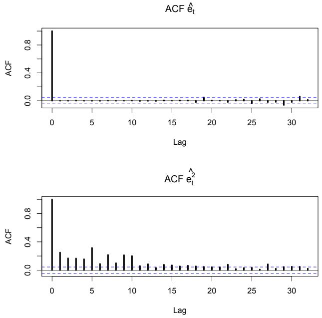
- En primer lugar, probemos con el modelo MA,

```
fit1 = arima(x, order=c(0,0,1),include.mean=FALSE)
fit1
fit2 = arima(x, order=c(1,0,1),include.mean=FALSE)
fit2
fit3 = arima(x, order=c(16,0,1),include.mean=FALSE)
fit3
AIC(fit1,fit2,fit3)
```

Ejemplo IPSA

- El mejor modelo es el 3. Veamos como se comportan los residuos.

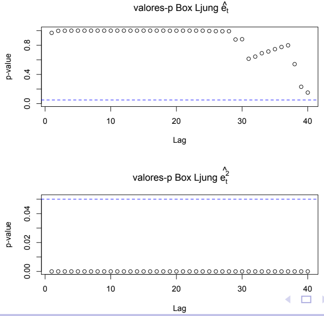
```
res = fit3$residuals
par(mfrow=c(2,1))
acf(res, lwd=3, main ="")
title(expression(paste("ACF ", hat(e[t] ))))
acf(res^2,main="", lwd=3)
title(expression(paste("ACF ", hat(e[t]^2 ))))
```



Ejemplo IPSA

- Notamos que en los residuos al cuadrado queda estructura de correlacion, lo cual podemos verificar utilizando la funcion Box.Test creada anteriormente,

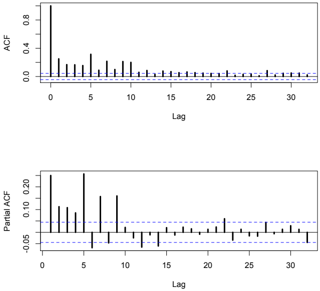
```
par(mfrow=c(2,1))
Box.Test(res,40, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ",
hat(e[t] ))))
Box.Test(res^2,40, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ",
hat(e[t]^2 ))))
```



Ejemplo IPSA

- Veamos que pasa con los ACF y PACF de los residuos al cuadrado,

```
par(mfrow=c(1,2))
acf(res^2, lwd=3, main ="")
pacf(res^2,main="", lwd=3)
```



Conclusiones

- Los residuos no son normales ya que si lo fueran los residuos al cuadrado no deberian tener correlacion.
- Esto ya que normalidad + correlacion nula = independencia.
- Luego, ajustar un modelo de la familia ARIMA no es adecuado ya que utiliza el supuesto de que los errores son normales.

Modelos Heterocedasticos: ARCH

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

20 de octubre de 2024