Clase 10 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

June 5, 2025

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA
- Estimación de Modelos ARMA

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA
- Estimación de Modelos ARMA
- Estimación de Yule-Walker

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA
- Estimación de Modelos ARMA
- Estimación de Yule-Walker
- Estimación MCO

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA
- Estimación de Modelos ARMA
- Estimación de Yule-Walker
- Estimación MCO
- Estimación de Máxima Verosimilitud

Espacios de Hilbert

- Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno completo, donde un producto interno cumple con,

$$< x, x >= ||x||^2 \Rightarrow ||x|| = \sqrt{< x, x >}$$

Este espacio se dice completo si toda sucesion de cauchy tiene un límite en el mismo espacio.

Espacios de Hilbert

- **Definición (Sucesión de Cauchy):** $\{X_n\}$ es una sucesión de Cauchy si,

$$\begin{aligned} ||X_n - X_m|| &\rightarrow 0 \\ n, m &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Espacios de Hilbert

- **Definición (Sucesión de Cauchy):** $\{X_n\}$ es una sucesión de Cauchy si,

$$\begin{aligned} ||X_n - X_m|| &\rightarrow 0 \\ n, m &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

- **Nota:** La definición de los espacios de Hilbert se hace necesaria para tratar los casos de pasado infinito.

Espacios de Hilbert

- **Definición (Sucesión de Cauchy):** $\{X_n\}$ es una sucesión de Cauchy si,

$$\begin{array}{rcl} ||X_n - X_m|| & \rightarrow & 0 \\ n, m & \rightarrow & +\infty \end{array}$$

- **Nota:** La definición de los espacios de Hilbert se hace necesaria para tratar los casos de pasado infinito.
- Por otro lado, para obtener un teorema de proyección es necesario tener un producto interno el cual define la geometria del espacio.
  Notación: $\mathcal{H}$

Equivalencias Producto Interno

- El producto interno entre dos valores x e y se define como,

$$< x, y >= \begin{cases} x^t y = \sum x_i y_i, & \text{si } x, y \in \mathbb{R}^n \\ x\bar{y}, & \text{si } x, y \in \mathbb{C}^n \\ \mathbb{E}(xy), & \text{si } x, y \in \mathcal{L}^2 \end{cases}$$

Teorema de Proyección

- Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ un proceso estacionario (debil). Nos interesa predecir los valores $Y_{n+h}, \quad \forall h > 0$. Para lograrlo debemos definir un Teorema de Proyección.

Teorema de Proyección

- Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ un proceso estacionario (debil). Nos interesa predecir los valores $Y_{n+h}, \quad \forall h > 0$. Para lograrlo debemos definir un Teorema de Proyección.

Teorema de Proyección

Teorema de Proyección

- Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ un proceso estacionario (debil). Nos interesa predecir los valores $Y_{n+h}, \quad \forall h > 0$. Para lograrlo debemos definir un Teorema de Proyección.

Teorema de Proyección

- Sea H un espacio de Hilbert y sea M un subespacio cerrado de Hilbert.
  Sea $X \in \mathcal{H}$ existe un único elemento $\hat{X} \in M$ tal que,

$$||X - \hat{X}|| \leq ||X - Y||, \ \forall Y \in M$$

Además,

$$< X - \hat{X}, Y >= 0, \forall Y \in M$$

Mejor Predictor Lineal

- De acuerdo con el Teorema de Proyección, existe un unico elemento $\hat{Y}_{n+1} \in M$ donde, $M = Sp\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, tal que,

$$< Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}, Y_t >= 0, \forall t = 1, \ldots, n$$

Mejor Predictor Lineal

- De acuerdo con el Teorema de Proyección, existe un unico elemento $\hat{Y}_{n+1} \in M$ donde, $M = Sp\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, tal que,

$$< Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}, Y_t >= 0, \forall t = 1, \ldots, n$$

- Sabemos que si $\hat{Y}_{n+1} \in M$, entonces

$$\hat{Y}_{n+1} = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n$$

Mejor Predictor Lineal

- De acuerdo con el Teorema de Proyección, existe un unico elemento $\hat{Y}_{n+1} \in M$ donde, $M = Sp\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, tal que,

$$< Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}, Y_t >= 0, \forall t = 1, \ldots, n$$

- Sabemos que si $\hat{Y}_{n+1} \in M$, entonces

$$\hat{Y}_{n+1} = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n$$

- Además, como $Y_1, \ldots, Y_n$ es un proceso estacionario, entonces existe la función de autocovarianza $\gamma(.)$ y por lo tanto el espacio de Hilbert es $\mathcal{L}^2$ y entonces $< y_t, y_{t+k} >= \mathbb{E}(y_t y_{t+k}) = \gamma(k)$

Mejor Predictor Lineal

- Sea $\underset{\sim}{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\Gamma_{ij} = \gamma(i-j)$, entonces,

$$\Rightarrow \Gamma \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\gamma}$$

Mejor Predictor Lineal

- Sea $\underset{\sim}{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\Gamma_{ij} = \gamma(i-j)$, entonces,

$$\Rightarrow \Gamma \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\gamma}$$

- Dado que Σ es una matriz de varianzas covarianzas y por lo tanto es definida positiva,

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\alpha} = \Gamma^{-1} \underset{\sim}{\gamma}$$

Mejor Predictor Lineal

- Sea $\underset{\sim}{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\Sigma_{ij} = \gamma(i-j)$,

  entonces,

$$\Rightarrow \Sigma \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\gamma}$$

Mejor Predictor Lineal

- Sea $\underset{\sim}{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\Sigma_{ij} = \gamma(i-j)$, entonces,

$$\Rightarrow \Sigma \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\gamma}$$

- Dado que Σ es una matriz de varianzas covarianzas y por lo tanto es definida positiva,

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\alpha} = \Sigma^{-1} \underset{\sim}{\gamma}$$

Mejor Predictor Lineal

- Adicionalmente, se puede mostrar que el elemento $\hat{Y}_{n+h}, \quad \forall h > 0$ corresponde a

$$\hat{Y}_{n+h} = \mathbb{E}[Y_{n+h}|Y_1, \ldots, Y_n]$$

Mejor Predictor Lineal

- Adicionalmente, se puede mostrar que el elemento $\hat{Y}_{n+h}, \quad \forall h > 0$ corresponde a

$$\hat{Y}_{n+h} = \mathbb{E}[Y_{n+h} | Y_1, \ldots, Y_n]$$

- **Nota:** $\hat{Y}_{n+h}$ corresponde al mejor predictor lineal Y_{n+h}. Si el proceso $\{Y_t\}$ es gaussiano, entonces Y_{n+h} es el mejor predictor.

Mejor Predictor Lineal

- Adicionalmente, se puede mostrar que el elemento $\hat{Y}_{n+h}, \quad \forall h > 0$ corresponde a

$$\hat{Y}_{n+h} = \mathbb{E}[Y_{n+h}|Y_1, \ldots, Y_n]$$

- **Nota:** $\hat{Y}_{n+h}$ corresponde al mejor predictor lineal Y_{n+h}. Si el proceso $\{Y_t\}$ es gaussiano, entonces Y_{n+h} es el mejor predictor.
- Denotamos el mejor predictor lineal basado en el subespacio M como,

$$\mathbb{E}_M[Y] = \mathbb{E}[Y|M] = P_M Y$$

Propiedades

- Para un proceso no centrado podemos definir el mejor predictor lineal como,

$$P_n Y_{n+h} = \mu + . \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (Y_{n+1-i} - \mu)$$

Propiedades

- Para un proceso no centrado podemos definir el mejor predictor lineal como,

$$P_n Y_{n+h} = \mu + . \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (Y_{n+1-i} - \mu)$$

- El valor esperado de error de predicción es cero y su media cuadrática esta dada por,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h})^2\right] &= \gamma(0) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma(h+i-1) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \gamma(i-j) \alpha_j \end{aligned}$$

Propiedades

1. $\mathbb{E}(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$

Propiedades

1. $\mathbb{E}(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$
2. $\mathbb{E}\left[(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) Y_j\right] = 0, \ \forall j = 1, \ldots, n$

Propiedades

1. $\mathbb{E}(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$
2. $\mathbb{E}\left[(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) Y_j\right] = 0, \ \forall j = 1, \ldots, n$
3. $P_n(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$

Propiedades

1. $\mathbb{E}(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$
2. $\mathbb{E}\left[(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) Y_j\right] = 0, \ \forall j = 1, \ldots, n$
3. $P_n(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$
4. $P_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_n Z_i$

Propiedades

1. $\mathbb{E}(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$
2. $\mathbb{E}\left[(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) Y_j\right] = 0, \ \forall j = 1, \ldots, n$
3. $P_n(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$
4. $P_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_n Z_i$

- En el caso general buscamos predecir Y_{n+h} en base a $M = Sp\{Y_n, Y_{n-1}, Y_{n-2}, \ldots\}$, es decir, en base al psado infinito.