

# Clase 11 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

June 19, 2025



# Conceptos Previos

- ▶ Procesos ARMA

# Conceptos Previos

- ▶ Procesos ARMA
- ▶ Estimación de Modelos ARMA

# Conceptos Previos

- ▶ Procesos ARMA
- ▶ Estimación de Modelos ARMA
- ▶ Predicción en Modelos ARMA

# Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ La función de autocorrelación parcial entrega información relevante sobre la estructura de dependencia de un proceso estacionario. La función de autocorrelación parcial  $\alpha(k)$  corresponde a la correlación entre los residuos en los tiempos 1 y  $k + 1$  dada intervención de  $Y_2, \dots, Y_k$ . Esta idea se precisa en la siguiente definición,

# Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ La función de autocorrelación parcial entrega información relevante sobre la estructura de dependencia de un proceso estacionario. La función de autocorrelación parcial  $\alpha(k)$  corresponde a la correlación entre los residuos en los tiempos 1 y  $k + 1$  dada intervención de  $Y_2, \dots, Y_k$ . Esta idea se precisa en la siguiente definición,
- ▶ **Definición:** Sea  $\alpha(\cdot)$  definido como,

$$\alpha(1) = \text{Corr}(Y_2, Y_1)$$

$$\alpha(k) = \text{Corr}(Y_{k+1} - P_M Y_{k+1}, Y_1 - P_M Y_1), \quad k \geq 2$$

donde  $M = [\{Y_2, \dots, Y_k\}]$

# Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ **Ejemplo:**  $AR(1)$  :  $Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$ . Demuestre que la FACP de un proceso  $AR(1)$  es igual a 0 para  $k \geq 1$ . (En general, la FACP de un  $AR(p) = 0$  para  $k > p$ ).

# Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ Una definición equivalente de la función de autocorrelación parcial es la siguiente. Sea  $\{Y_t\}$  un proceso estacionario con función de autocovarianza  $\gamma(\cdot)$  y suponga que los coeficientes  $\phi_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  son los coeficientes en la representación

$$P_{\{Y_1, \dots, Y_k\}} Y_{k+1} = \phi_{k1} Y_k + \phi_{k2} Y_{k-1} + \dots + \phi_{kk} Y_1$$

Se puede mostrar que  $\alpha(k) = \phi_{kk}$ , para  $k \geq 2$ .

# Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ **Método de Determinantes:** Recuerde que  $\phi_{kk}$  se obtienen a partir del sistema de ecuaciones:

$$\Rightarrow \Gamma \underline{\phi} = \underline{\gamma}$$

donde  $\underline{\phi} = (\phi_{k1} \phi_{k2} \dots \phi_{kk})$ . El sistema se puede resolver usando la Regla de Cramer, de manera que,

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $P_k$  es la matriz de correlaciones y  $P_k^*$  es la matriz de correlación corregida, donde la última columna es sustituida por el vector de autocorrelaciones.

# Función de Autocorrelación Parcial

- Método de Determinantes: Para  $k = 1, 2, 3$  tenemos que,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho(1) \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}\end{aligned}$$

# Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ **Ejemplo:** Use el método de determinantes para verificar el resultado obtenido para la FACP de un proceso AR(1).

# Algoritmo de Durbin Levinson.

- ▶ Los enfoques anteriores requieren encontrar la solución de un sistema de  $n$  ecuaciones lineales, que para un  $n$  grande puede ser muy costoso en términos de tiempo.

# Algoritmo de Durbin Levinson.

- ▶ Los enfoques anteriores requieren encontrar la solución de un sistema de  $n$  ecuaciones lineales, que para un  $n$  grande puede ser muy costoso en términos de tiempo.
- ▶ Alternativamente, se puede simplificar el cálculo del predictor a un paso  $\hat{Y}_{n+1}$  basados en las  $n$  observaciones previas, usando como base el partir del predictor a un paso  $\hat{Y}_n$  basados en las  $n - 1$  observaciones previas.

# Algoritmo de Durbin Levinson.

- ▶ Los enfoques anteriores requieren encontrar la solución de un sistema de  $n$  ecuaciones lineales, que para un  $n$  grande puede ser muy costoso en términos de tiempo.
- ▶ Alternativamente, se puede simplificar el cálculo del predictor a un paso  $\hat{Y}_{n+1}$  basados en las  $n$  observaciones previas, usando como base el partir del predictor a un paso  $\hat{Y}_n$  basados en las  $n - 1$  observaciones previas.
- ▶ Los algoritmos que siguen este enfoque, se llaman recursivos. Existen dos importantes ejemplos, el algoritmo de Durbin-Levinson y el algoritmo de Innovaciones.

# Algoritmo de Durbin Levinson.

## Algoritmo de Durbin Levinson

# Algoritmo de Durbin Levinson.

## Algoritmo de Durbin Levinson

- ▶ **Inicialización:**  $\phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$ ,  $v_0 = \gamma(0)$  y  $v_1 = v_0 [1 - \phi_{11}^2]$ .

# Algoritmo de Durbin Levinson.

## Algoritmo de Durbin Levinson

- ▶ **Inicialización:**  $\phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$ ,  $v_0 = \gamma(0)$  y  $v_1 = v_0 [1 - \phi_{11}^2]$ .
- ▶ **Algoritmo:**

$$\phi_{nn} = \left[ \gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-j) \right] v_{n-1}^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} \phi_{n1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{nn} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix}$$
$$v_n = v_{n-1} [1 - \phi_{nn}^2]$$

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$  el MPL de  $y_{n+1}$ , donde  $e_{n+1-j}$  es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por  $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$ . Los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$  el MPL de  $y_{n+1}$ , donde  $e_{n+1-j}$  es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por  $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$ . Los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

## Algoritmo de Innovaciones

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$  el MPL de  $y_{n+1}$ , donde  $e_{n+1-j}$  es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por  $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$ . Los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

## Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Inicialización:**  $\theta_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$  y  $v_0 = \gamma(0)$ .

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$  el MPL de  $y_{n+1}$ , donde  $e_{n+1-j}$  es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por  $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$ . Los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

## Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Inicialización:**  $\theta_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$  y  $v_0 = \gamma(0)$ .
- ▶ **Algoritmo:**

$$\begin{aligned}\theta_{n,n} &= [\gamma(n)] v_0^{-1} \\ \theta_{n,n-k} &= \left[ \gamma(n-k) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right] v_k^{-1} \quad 1 \leq k < n \\ v_n &= \gamma(0) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j\end{aligned}$$

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Nota:** Mientras que el algoritmo de Durbin-Levinson da los coeficientes  $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$  de  $y_n, \dots, y_1$  en la representación  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} y_{n+1-j}$ . El algoritmo de innovaciones, en cambio, da los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  de  $(y_n - \hat{y}_n), \dots, (y_1 - \hat{y}_1)$  en la representación  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} (y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j})$ .

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Nota:** Mientras que el algoritmo de Durbin-Levinson da los coeficientes  $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$  de  $y_n, \dots, y_1$  en la representación  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} y_{n+1-j}$ . El algoritmo de innovaciones, en cambio, da los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  de  $(y_n - \hat{y}_n), \dots, (y_1 - \hat{y}_1)$  en la representación  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} (y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j})$ .
- ▶ El algoritmo de innovaciones generalmente es más eficiente, debido a que se basa en las innovaciones que no están correlacionadas.

# Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Nota:** Mientras que el algoritmo de Durbin-Levinson da los coeficientes  $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$  de  $y_n, \dots, y_1$  en la representación  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} y_{n+1-j}$ . El algoritmo de innovaciones, en cambio, da los coeficientes  $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$  de  $(y_n - \hat{y}_n), \dots, (y_1 - \hat{y}_1)$  en la representación  $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} (y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j})$ .
- ▶ El algoritmo de innovaciones generalmente es más eficiente, debido a que se basa en las innovaciones que no están correlacionadas.
- ▶ Debido a la estructura de correlaciones de los procesos  $MA(q)$ , el algoritmo de innovaciones es particularmente útil para predecir estos procesos.