Clase 3 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

April 17, 2025

Conceptos Previos

- Alisado Exponencial Simple-Medias Móviles Simples.

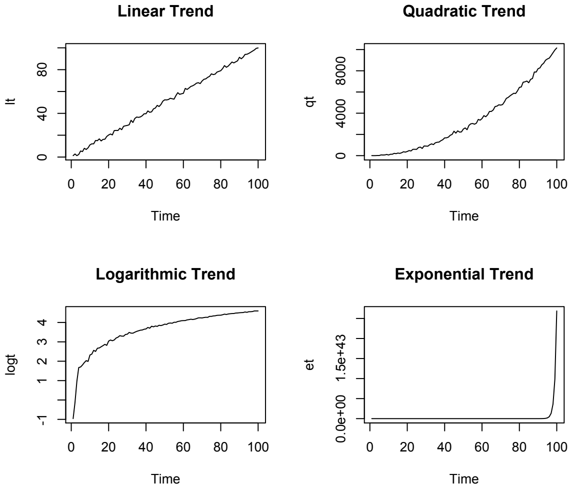
Conceptos Previos

- Alisado Exponencial Simple-Medias Móviles Simples.
- Alisado Exponencial Lineal Biparametrico de Holt.

Conceptos Previos

- Alisado Exponencial Simple-Medias Móviles Simples.
- Alisado Exponencial Lineal Biparametrico de Holt.
- Alisado Exponencial de Holt Winters

Tipos de Tendencia



Enfoque Regresión

- Usualmente, la información disponible para predecir el comportamiento de un fenómeno es como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
y_1, \ldots, y_n & \Rightarrow & \text{Serie de Tiempo} \\
x_{01}, \ldots, x_{0n} & \Rightarrow & \text{Covariable 1} \\
x_{11}, \ldots, x_{1n} & \Rightarrow & \text{Covariable 2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_{p1}, \ldots, x_{pn} & \Rightarrow & \text{Covariable p}
\end{array}
$$

Enfoque Regresión

- Un caso particular de covariables es $x_{0t} = 1$ y $x_{1t} = t$, que corresponde a un modelo lineal, donde

$$y_t = \beta_0 x_{0t} + \beta_1 x_{1t} + \epsilon_t$$

Enfoque Regresión

- Un caso particular de covariables es $x_{0t} = 1$ y $x_{1t} = t$, que corresponde a un modelo lineal, donde

$$y_t = \beta_0 x_{0t} + \beta_1 x_{1t} + \epsilon_t$$

- Agregando una tercera componente $x_{2t} = t^2$. Podemos ajustar un modelo cuadrático a una serie del tipo:

$$y_t = \beta_0 x_{0t} + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \epsilon_t$$

Enfoque Regresión

- En general, para un polinomio de grado m se puede ajustar un modelo polinomial definido por:

$$y_t = \beta_0 x_{0t} + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_m x_{mt} + \epsilon_t$$

donde $x_{jt} = t^j \forall j = 0, \ldots, m$.

Enfoque Regresión

- En general, para un polinomio de grado m se puede ajustar un modelo polinomial definido por:

$$y_t = \beta_0 x_{0t} + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_m x_{mt} + \epsilon_t$$

  donde $x_{jt} = t^j \forall j = 0, \ldots, m$.
- Para estimar los parámetros del modelo podemos utilizar métodos convenciales como MCO. El problema es que se puede presentar correlación entre las variables independientes, pero se puede utilizar algún procedimiento para ortogonalizar las variables.

Estimación de Mínimos Cuadrados

- Sea el vector de parámetros dado por $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$, el estimador de minimos cuadrádos se define por

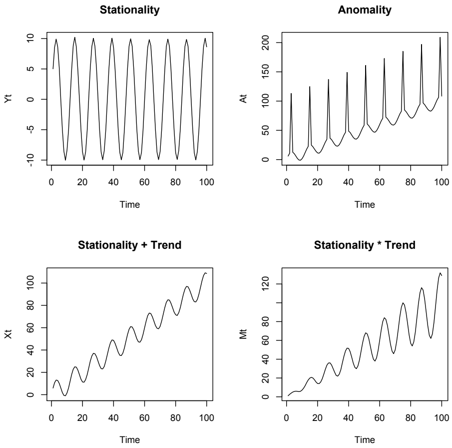
$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

donde las matrices X e Y se definen como,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \ldots & 2^m \\ 1 & 3 & 9 & \ldots & 3^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & N & N^2 & \ldots & N^m \end{bmatrix}$$

Estacionalidad

- La estacionalidad es una característica que presentan algunas series en lo largo del tiempo, y dicha característica es observada con periodicidad. En esta sección podemos considerar los siguientes casos,



Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \tag{1}$$

donde

Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \tag{1}$$

donde

  - A=amplitud de la serie.

Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \tag{1}$$

donde

  - A=amplitud de la serie.
  - ω es el número de ciclos por unidad de tiempo.

Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \tag{1}$$

donde

  - A=amplitud de la serie.
  - ω es el número de ciclos por unidad de tiempo.
  - $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$.

Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \tag{1}$$

donde

  - A=amplitud de la serie.
  - ω es el número de ciclos por unidad de tiempo.
  - $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$.
  - P período de la serie.

Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

donde

- A=amplitud de la serie.
- ω es el número de ciclos por unidad de tiempo.
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$.
- P período de la serie.
- f frecuencia de la serie.

Regresión Armónica

- Sea el modelo

$$Y_t = Asin(\omega t + \psi) \tag{1}$$

donde

  - A=amplitud de la serie.
  - ω es el número de ciclos por unidad de tiempo.
  - $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$.
  - P período de la serie.
  - f frecuencia de la serie.
  - ψ desfase de la serie

Regresión Armónica

- Consideremos el modelo (1), como $\omega = 2\pi f$ podemos escribir,

$$\begin{aligned} Y_t &= Asin(2\pi ft + \psi) \\ &= A[sin(2\pi ft)cos(\psi) + cos(2\pi ft)sin(\psi)] \\ &= \underbrace{Acos(\psi)}_{\beta_1} sin(2\pi ft) + \underbrace{Asin(\psi)}_{\beta_2} cos(2\pi ft) \end{aligned}$$

Luego,

$$Y_t = \beta_1 sin(2\pi ft) + \beta_2 cos(2\pi ft) \tag{2}$$

Regresión Armónica

- Esto puede ser visto como un modelo de regresión simple,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(2\pi f) & cos(2\pi f) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ sin(2\pi fN) & cos(2\pi fN) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Regresión Armónica

- Ahora, en el caso general,

$$Y_t = \beta_{11} sin(2\pi f_1 t) + \beta_{21} cos(2\pi f_1 t) + \ldots + \beta_{1q} sin(2\pi f_q t) + \beta_{2q} cos(2\pi f_q t) + \epsilon_t \quad (3)$$

  donde, las frecuencias propias $\{f_1, \ldots, f_q\}$ se calculan en base al espectro de la serie o transformada de Fourier, tópico que veremos más adelante. Supondremos ahora que las frecuencias propias f_i son conocidas.

Regresión Armónica

- Sea la regresión armónico simple ajustada con una frecuencia propia del tipo,

$$Y_t = \beta_1 sin(2\pi ft) + \beta_2 cos(2\pi ft) + \epsilon_t$$

podemos obtener una estimación de A y ψ a partir de las estimaciones de β_1 y β_2, usando,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \\ \psi &= atan(\beta_1/\beta_2) \end{aligned}$$

Regresión con variables dummy

- Suponga el modelo con tendencia determinística,

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_m t^m$$

Regresión con variables dummy

- Suponga el modelo con tendencia determinística,

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_m t^m$$

- Para nuestro modelo vamos a suponer que la periodicidad observada ocurre cada 12 periodos de tiempo, entonces

$$S_t = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j d_{jt}$$

Regresión con variables dummy

- Suponga el modelo con tendencia determinística,

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_m t^m$$

- Para nuestro modelo vamos a suponer que la periodicidad observada ocurre cada 12 periodos de tiempo, entonces

$$S_t = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j d_{jt}$$

- Como suponemos la estacionalidad constante, α_j no dependen del tiempo, entonces podemos pensar en variables "dummys", por ejemplo en el caso que se presente una estacionalidad cada 12 meses (en una serie mensual).

$$d_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si el periodo t corresponde al mes j} \quad j = 1, \ldots, 12 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Regresión con variables dummy

- En este caso,

$$\sum_{j=1}^{12} d_{jt} = d_{1t} + d_{2t} + \ldots + d_{12t}, \qquad t = 1, 2, \ldots, n$$

de modo que la matriz no es de rango completo, así, imponemos la restricción adicional

$$\sum_{j=1}^{12} \alpha_j = 0$$

y obtenemos el modelo de rango completo

$$Y_t = \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j + \sum_{j=1}^{11} \alpha_j D_{jt} + \epsilon_t$$

Regresión con variables dummy

- El modelo de rango completo

$$Y_t = \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j + \sum_{j=1}^{11} \alpha_j D_{jt} + \epsilon_t$$

donde ahora,

$$D_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si el periodo t corresponde al mes j} \quad j = 1, \ldots, 11 \\ -1, & \text{si el periodo t corresponde al mes 12,} \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Regresión con variables dummy

- De este modelo podemos utilizar la teoría usual de mínimos cuadrados y obtener los estimadores de α_j y β_j, o sea, para una muestra $Y_1, \ldots, Y_N$ obtenemos el modelo

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}\beta + \mathrm{D}\alpha + \epsilon$$

donde,

$$Y_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad C_{n\times(m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \ldots & n^m \end{bmatrix}, \quad \alpha_{11\times 1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{(m+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}, \quad D_{n\times 11} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \ldots & D_{11,1} \\ D_{12} & D_{22} & \ldots & D_{11,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \ldots & D_{11,n} \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

Regresión con variables dummy

- El modelo se puede escribir de la siguiente manera,

$$Y = X\gamma + \epsilon$$

donde,

$$X = [C : D] \quad \text{y} \quad \gamma = \left[\begin{array}{c} \beta \\ \dots \\ \alpha \end{array} \right]$$

de modo que el estimador de mínimos cuadrados está dado por

$$\hat{\gamma} = [X'X]^{-1}X'Y$$