Clase 5 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

April 21, 2025

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.
- Enfoque Suavizado.

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.
- Enfoque Suavizado.
- Enfoque Regresión.

Capitulo 2

Procesos Lineales

Operador de Rezago

- Se define el operador de rezago (o retardo) (B o L) como:

$$BX_t = X_{t-1}$$

Operador de Rezago

- Se define el operador de rezago (o retardo) (B o L) como:

$$BX_t = X_{t-1}$$

- Además, se cumple que,

$$B^2 X_t = B(BX_t) = BX_{t-1} = X_{t-2}$$

Operador de Rezago

- Se define el operador de rezago (o retardo) (B o L) como:

$$BX_t = X_{t-1}$$

- Además, se cumple que,

$$B^2X_t = B(BX_t) = BX_{t-1} = X_{t-2}$$

- Más generalmente,

$$B^jX_t = X_{t-j}$$

Operador de Diferencias de Rezago

- Se define el operador de diferencias con rezago 1, denotado por ∇, por:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

Operador de Diferencias de Rezago

- Se define el operador de diferencias con rezago 1, denotado por ∇, por:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

- Por lo tanto, $\nabla = (1 - B)$.

Operador de Diferencias de Rezago

- Se define el operador de diferencias con rezago 1, denotado por ∇, por:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

- Por lo tanto, $\nabla = (1 - B)$.
- Propiedades:

$$\begin{aligned} \nabla^j X_t &= \nabla(\nabla^{j-1} X_t) \quad j \geq 1 \\ \nabla^0 X_t &= X_t \end{aligned}$$

Operador de Rezago

- Los operadores B y ∇ se manipulan como funciones polinomiales.

Operador de Rezago

- Los operadores B y ∇ se manipulan como funciones polinomiales.
- Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t) \\
&= (1-B)(1-B)X_t \\
&= (1-2B+B^2)X_t \\
&= X_t - 2BX_t + B^2X_t \\
&= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}
\end{aligned}
$$

Operador de Rezago

- **Ejemplo:** Considere una tendencia lineal del tipo:

$$m_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

Obtenga ∇m_t. Concluya sobre este resultado,

Operador de Rezago

Observaciones

Operador de Rezago

Observaciones

- No se pueden aplicar otras operaciones matemáticas sobre los operadores (ej, $\sqrt{.}$ o $\log(.)$)

Operador de Rezago

Observaciones

- No se pueden aplicar otras operaciones matemáticas sobre los operadores (ej, $\sqrt{.}$ o $\log(.)$)
- No se puede aplicar el operador de rezago a series que tengan frecuencias distintas (meses, semanas, días). Es decir, deben ser series comparables.

Proceso Lineal General

- Un proceso lineal general (PLG) es una combinación lineal de una secuencia de ruido blanco. Es decir $\{X_t\}$ es un PLG si puede escribirse como:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \epsilon_{t-j} \tag{1}$$

donde a_j son coeficientes cualquiera y $\{\epsilon_t\} \sim RB$

Proceso Lineal General

- Para que los momentos de X_t este bien definidos debemos imponer una de las siguientes condiciones:

Proceso Lineal General

- Para que los momentos de X_t este bien definidos debemos imponer una de las siguientes condiciones:
  1. $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$

Proceso Lineal General

- Para que los momentos de X_t este bien definidos debemos imponer una de las siguientes condiciones:
  1. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$
  2. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$ (menos usada)

Proceso Lineal General

- Para que los momentos de X_t este bien definidos debemos imponer una de las siguientes condiciones:
  1. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$
  2. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$ (menos usada)
- **Nota:** (2) $\Rightarrow$ (1) pero no necesariamente (1) $\Rightarrow$ (2)

Proceso Lineal General

- Usando el operador de rezago, la ecuación (1) se puede escribir como:

$$X_t = A(B)\epsilon_t$$

donde $A(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j B^j$

Proceso Lineal General

- Usando el operador de rezago, la ecuación (1) se puede escribir como:
$$X_t = A(B)\epsilon_t$$
donde $A(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j B^j$
- **Pregunta**: Es un PLG un proceso estacionario?

Proceso Lineal General

- Un PLG $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con las siguientes propiedades

Proceso Lineal General

- Un PLG $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con las siguientes propiedades
  1. $\mathbb{E}(X_t) = 0$

Proceso Lineal General

- Un PLG $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con las siguientes propiedades
  1. $\mathbb{E}(X_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$

Proceso Lineal General

- Un PLG $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con las siguientes propiedades
  1. $\mathbb{E}(X_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$
  3. $\mathbb{C}(X_t, X_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{j} a_j a_{j-k} = \sigma^2 \gamma(k)$

Proceso Lineal General

- **Ejemplo**: Suponga X_t es un PLG definido con los siguientes coeficientes:
$$a_j = \begin{cases} \phi^j, & j \geq 0 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$
con $\phi < 1$. Obtenga la función de autocorrelación del proceso X_t.

Proceso Causal

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice causal se si define en base a $\{\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots\}$. Es decir, un proceso no es causal cuando involucra valores futuros del ruido.

Proceso Causal

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice causal se si define en base a $\{\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots\}$. Es decir, un proceso no es causal cuando involucra valores futuros del ruido.
- **Ejemplos:**

Proceso Causal

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice causal se si define en base a $\{\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots\}$. Es decir, un proceso no es causal cuando involucra valores futuros del ruido.
- **Ejemplos:**
  1. $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t+1}$

Proceso Causal

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice causal se si define en base a $\{\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots\}$. Es decir, un proceso no es causal cuando involucra valores futuros del ruido.
- **Ejemplos:**
  1. $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t+1}$
  2. $X_t = \epsilon_t + \epsilon_t \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+1} \epsilon_{t+2}$

Proceso Causal

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice causal se si define en base a $\{\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots\}$. Es decir, un proceso no es causal cuando involucra valores futuros del ruido.
- **Ejemplos:**
  1. $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t+1}$ proceso lineal no causal
  2. $X_t = \epsilon_t + \epsilon_t\epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+1}\epsilon_{t+2}$ proceso no lineal no causal

Proceso Causal

- Veremos que en la practica el concepto de causalidad se confunde con el concepto de estacionaridad. Para evitar esta confusión se muestran los siguientes ejemplos
- **Ejemplos:**
  1. $X_t = \epsilon_{t+1}$ proceso estacionario no causal.
  2. $X_t = t\epsilon_{t-1}$ proceso no estacionario y causal.