Clase 6 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

April 28, 2025

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.
- Validación de los Supuestos.

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.
- Validación de los Supuestos.
- Operador de Rezago y de Diferencia.

Conceptos Previos

- Descomposición de Series de Tiempo.
- Validación de los Supuestos.
- Operador de Rezago y de Diferencia.
- Proceso Lineal General.

Proceso Autoregressivo

- Un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ se dice autoregresivo de orden p $AR(p)$ si:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t \tag{1}$$

donde $p \geq 1$ y $\{\epsilon_t\} \sim RB$.

Proceso Autoregressivo

- Un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ se dice autoregresivo de orden p $AR(p)$ si:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t \tag{1}$$

  donde $p \geq 1$ y $\{\epsilon_t\} \sim RB$.
- Además, $Cov(\epsilon_t, Y_{t-j}) = \mathbb{E}(\epsilon_t Y_{t-j}) = 0 \;\; \forall j > 0$

Proceso Autoregressivo

- Un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ se dice autoregresivo de orden p $AR(p)$ si:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t \tag{1}$$

  donde $p \geq 1$ y $\{\epsilon_t\} \sim RB$.
- Además, $Cov(\epsilon_t, Y_{t-j}) = \mathbb{E}(\epsilon_t Y_{t-j}) = 0 \ \ \forall j > 0$
- $\phi_1, \ldots, \phi_p$ son coeficientes fijos (a estimar).

Proceso Autoregressivo

- Un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ se dice autoregresivo de orden p $AR(p)$ si:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t \tag{1}$$

  donde $p \geq 1$ y $\{\epsilon_t\} \sim RB$.
- Además, $Cov(\epsilon_t, Y_{t-j}) = \mathbb{E}(\epsilon_t Y_{t-j}) = 0 \;\; \forall j > 0$
- $\phi_1, \ldots, \phi_p$ son coeficientes fijos (a estimar).
- Se definen los valor iniciales $Y_i = \epsilon_i$, con $i = 1, \ldots, p$

Proceso Autoregressivo

- Equivalentemente, se puede definir el proceso autoregresivo de orden p $AR(p)$ como:

$$\Phi_p(B)Y_t = \epsilon_t \tag{2}$$

donde $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ es el polinomio autoregresivo de orden p.

Proceso Autoregressivo

- Equivalentemente, se puede definir el proceso autoregresivo de orden p $AR(p)$ como:

$$\Phi_p(B)Y_t = \epsilon_t \tag{2}$$

  donde $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ es el polinomio autoregresivo de orden p.
- **Notación:** $Y_t \sim AR(p)$

Proceso Autoregressivo

- **Ejemplo:** Considere $Y_t \sim AR(1)$, es decir

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \\ Y_t - \phi Y_{t-1} &= \epsilon_t \\ Y_t - \phi B Y_t &= \epsilon_t \\ Y_t(1 - \phi B) &= \epsilon_t \\ \Phi_1(B) Y_t &= \epsilon_t \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\Phi_1(B) = 1 - \phi B$.

Proceso Autoregressivo

- **Ejemplo:** Considere $Y_t \sim AR(1)$, es decir

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \\ Y_t - \phi Y_{t-1} &= \epsilon_t \\ Y_t - \phi B Y_t &= \epsilon_t \\ Y_t(1 - \phi B) &= \epsilon_t \\ \Phi_1(B) Y_t &= \epsilon_t \end{aligned} \tag{3}$$

  donde $\Phi_1(B) = 1 - \phi B$.
- Es el proceso $Y_t \sim AR(1)$ un proceso estacionario?

Proceso Autoregressivo

- El proceso $Y_t \sim AR(1)$ es un proceso estacionario bajo $|\phi| < 1$ con las siguientes propiedades,

Proceso Autoregressivo

- El proceso $Y_t \sim AR(1)$ es un proceso estacionario bajo $|\phi| < 1$ con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$

Proceso Autoregressivo

- El proceso $Y_t \sim AR(1)$ es un proceso estacionario bajo $|\phi| < 1$ con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \sigma_y^2$

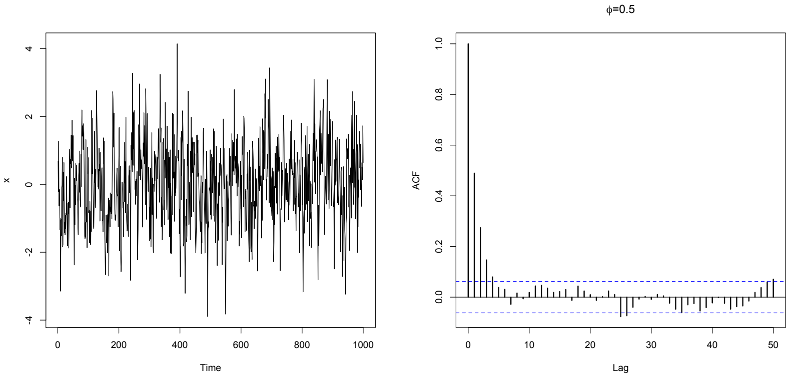
Proceso Autoregressivo

- El proceso $Y_t \sim AR(1)$ es un proceso estacionario bajo $|\phi| < 1$ con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \sigma_y^2$
  3. $\mathbb{C}(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{\sigma^2 \phi^{|k|}}{1-\phi^2} = \sigma_y^2 \phi^{|k|}$

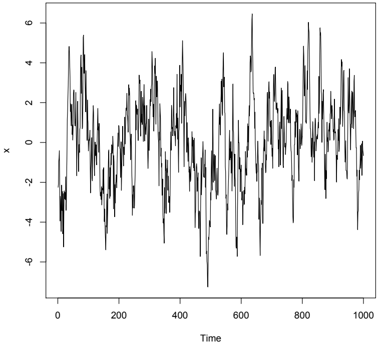
Proceso Autoregressivo

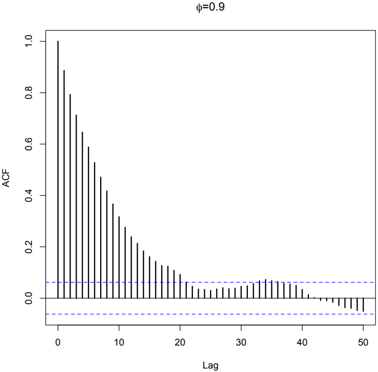
- El proceso $Y_t \sim AR(1)$ es un proceso estacionario bajo $|\phi| < 1$ con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \sigma_y^2$
  3. $\mathbb{C}(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{\sigma^2 \phi^{|k|}}{1-\phi^2} = \sigma_y^2 \phi^{|k|}$
  4. $\rho(k) = \phi^{|k|}$

Proceso Autoregressivo

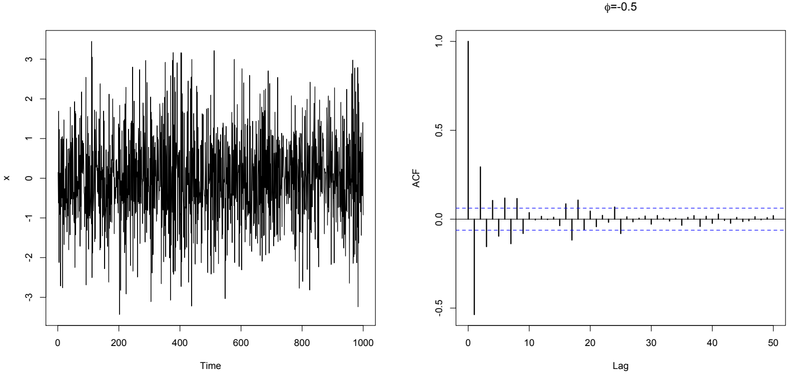


Proceso Autoregressivo





Proceso Autoregressivo



Proceso Autoregressivo

- Mencionamos anteriormente que una condición requerida para la estacionaridad es $|\phi| < 1$.

Proceso Autoregressivo

- Mencionamos anteriormente que una condición requerida para la estacionaridad es $|\phi| < 1$.
- Esta condición es equivalente a decir que la raíz del polinomio $\Phi_1(B) = 1 - \phi B$ está fuera del circulo unitario

Proceso Autoregressivo

- Mencionamos anteriormente que una condición requerida para la estacionaridad es $|\phi| < 1$.
- Esta condición es equivalente a decir que la raíz del polinomio $\Phi_1(B) = 1 - \phi B$ está fuera del circulo unitario
- Es decir,

$$|\phi| < 1 \iff |B| > 1$$

Representación Causal Proceso AR(1)

- Sea el proceso AR(1)

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Representación Causal Proceso AR(1)

- Sea el proceso AR(1)

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Bajo $|\phi| < 1$, el proceso anterior puede ser escrito como,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}$$

la cual es una representación causal del proceso AR(1)

Representación Causal Proceso AR(p)

- En general, para probar que un proceso AR(p) sea causal (y estacionario), debemos verificar que las raices del polinomio:

$$\Phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \ldots - \phi_p z^p = 0$$

estan todas fueras del circulo unitario. Es decir, $|z_j * | > 1 \quad \forall j = 1, \ldots, p$, donde z_j* es la j-ésima raiz del polinomio $\Phi_p(z)$

Proceso AR(2)

- Un proceso autoregresivo $\{Y_t\}$ se dice de orden 2 $AR(2)$ si:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = \epsilon_t \tag{4}$$

- Usando el operador de rezago, se puede reescribir el proceso como:

$$Y_t(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = \epsilon_t \tag{5}$$

donde $\Phi_2(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$ es el polinomio autoregresivo de orden 2.

Proceso AR(2)

- En este caso, se puede verificar que las raices del polinomio $\Phi_2(z) = (1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2) = 0$ son,

$$z_j* = -\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \tag{6}$$

  Si $|z_j *| > 1 \quad \forall j = 1, 2$ el proeso es causal y estacionario.

- Una condición equivalente es,
  i) $\phi_1 + \phi_2 < 1$
  ii) $\phi_2 - \phi_1 < 1$
  iii) $|\phi_2| < 1$

  todas se deben cumplir