Clase 7 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

April 28, 2025

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso Causal

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso Causal
- Procesos Autoregresivos

Proceso de Medias Móviles

- Un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ se dice de medias móviles de orden q $MA(q)$ si:

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q} \tag{1}$$

donde $q \geq 1$ y $\{\epsilon_t\} \sim RB$.

Proceso de Medias Móviles

- Un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ se dice de medias móviles de orden q $MA(q)$ si:

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q} \tag{1}$$

  donde $q \geq 1$ y $\{\epsilon_t\} \sim RB$.

- $\theta_1, \ldots, \theta_q$ son coeficientes fijos (a estimar).

Proceso de Medias Móviles

- Equivalentemente, se puede definir el proceso de medias móviles de orden q $MA(q)$ como:

$$Y_t = \Theta_q(B)\epsilon_t \tag{2}$$

donde $\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$ es el polinomio de medias móviles de orden q.

Proceso de Medias Móviles

- Equivalentemente, se puede definir el proceso de medias móviles de orden q $MA(q)$ como:

$$Y_t = \Theta_q(B)\epsilon_t \tag{2}$$

  donde $\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$ es el polinomio de medias móviles de orden q.
- **Notación:** $Y_t \sim MA(q)$

Proceso de Medias Móviles

- **Ejemplo:** Considere $Y_t \sim MA(1)$, es decir

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \\
Y_t &= \epsilon_t + \theta B\epsilon_t \\
Y_t &= (1+\theta B)\epsilon_t \\
Y_t &= \Theta_1(B)\epsilon_t
\end{aligned} \tag{3}
$$

donde $\Theta_1(B) = 1 + \theta B$.

Proceso de Medias Móviles

- **Ejemplo:** Considere $Y_t \sim MA(1)$, es decir

$$\begin{aligned} Y_t &= \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \\ Y_t &= \epsilon_t + \theta B\epsilon_t \\ Y_t &= (1+\theta B)\epsilon_t \\ Y_t &= \Theta_1(B)\epsilon_t \end{aligned} \tag{3}$$

  donde $\Theta_1(B) = 1 + \theta B$.
- Es el proceso $Y_t \sim MA(1)$ un proceso estacionario?

Proceso de Medias Móviles

- **Ejemplo:** Considere $Y_t \sim MA(1)$, es decir

$$\begin{aligned} Y_t &= \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \\ Y_t &= \epsilon_t + \theta B\epsilon_t \\ Y_t &= (1+\theta B)\epsilon_t \\ Y_t &= \Theta_1(B)\epsilon_t \end{aligned} \tag{3}$$

  donde $\Theta_1(B) = 1 + \theta B$.
- Es el proceso $Y_t \sim MA(1)$ un proceso estacionario?
- Obtengamos su media, varianza, ACVF y ACF.

Proceso de Medias Móviles

- El proceso $Y_t \sim MA(1)$ es un proceso estacionario, con las siguientes propiedades,

Proceso de Medias Móviles

- El proceso $Y_t \sim MA(1)$ es un proceso estacionario, con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$

Proceso de Medias Móviles

- El proceso $Y_t \sim MA(1)$ es un proceso estacionario, con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(Y_t) = \sigma^2(1 + \theta^2) = \sigma_y^2$

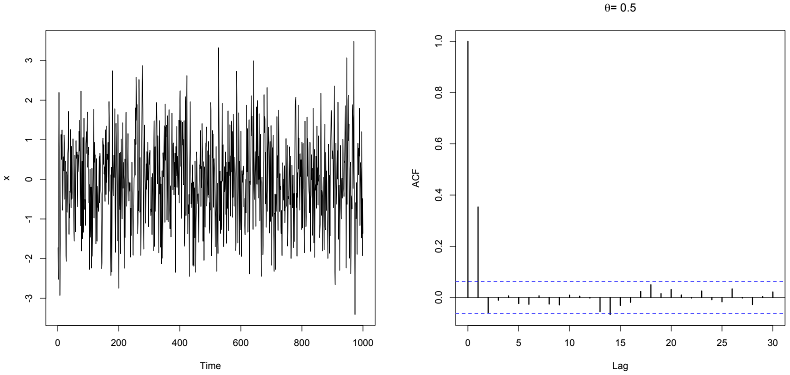
Proceso de Medias Móviles

- El proceso $Y_t \sim MA(1)$ es un proceso estacionario, con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(Y_t) = \sigma^2(1+\theta^2) = \sigma_y^2$
  3. $\mathbb{C}(Y_t, Y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & k = 0 \\ \theta\sigma^2, & k = 1 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$

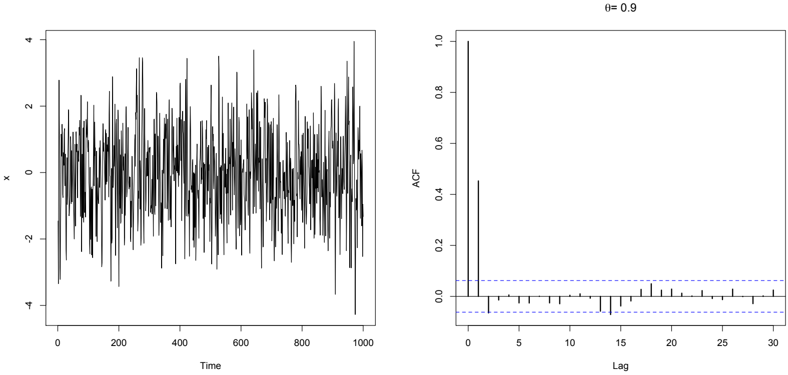
Proceso de Medias Móviles

- El proceso $Y_t \sim MA(1)$ es un proceso estacionario, con las siguientes propiedades,
  1. $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
  2. $\mathbb{V}(Y_t) = \sigma^2(1+\theta^2) = \sigma_y^2$
  3. $\mathbb{C}(Y_t, Y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & k = 0 \\ \theta\sigma^2, & k = 1 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$
  4. $\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2}, & k = 1 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$

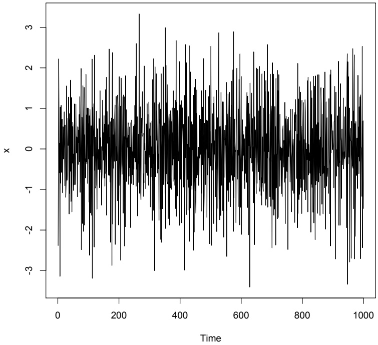
Proceso de Medias Móviles

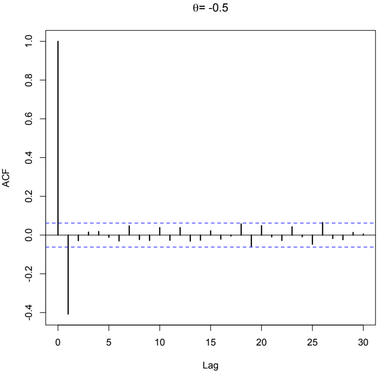


Proceso de Medias Móviles



Proceso de Medias Móviles





Invertibilidad

- Consideremos el modelo MA(1), es decir,

$$Y_t = (1 + \theta B)\epsilon_t$$

Invertibilidad

- Consideremos el modelo MA(1), es decir,

$$Y_t = (1 + \theta B)\epsilon_t$$

- Podemos invertir el polinomio $\Theta_1(B) = (1 + \theta B)$ para obtener

$$\epsilon_t = (1 + \theta B)^{-1} Y_t$$

donde $(1 + \theta B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j}$ y $\pi_j = (-\theta)^j$ bajo $|\theta| < 1$

Invertibilidad

- Consideremos el modelo MA(1), es decir,

$$Y_t = (1 + \theta B)\epsilon_t$$

- Podemos invertir el polinomio $\Theta_1(B) = (1 + \theta B)$ para obtener

$$\epsilon_t = (1 + \theta B)^{-1} Y_t$$

donde $(1 + \theta B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j}$ y $\pi_j = (-\theta)^j$ bajo $|\theta| < 1$

- Consideremos el polinomio $\Theta_1(z) = (1 + \theta z)$, la raíz de $\Theta_1(z)$, está dada por $\Theta_1(z) = 0$, es decir $z = \theta^{-1}$, entonces

$$|\theta| < 1 \iff |z| > 1$$

Representación Invertible Proceso MA(q)

- En general, para probar que un proceso MA(q) sea invertible, debemos verificar que las raices del polinomio:

$$\Theta_q(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \ldots + \theta_q z^q = 0$$

estan todas fueras del circulo unitario. Es decir, $|z_j *| > 1 \;\; \forall j = 1, \ldots, q$, donde z_j* es la j-ésima raiz del polinomio $\Theta_q(z)$