Clase 8 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

May 15, 2025

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso Autoregresivo

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso Autoregresivo
- Proceso de Medias Móviles

Proceso Autoregressivo de Medias Móviles

- Sea un proceso estocástico $\{Y_t\}, \quad t \in T$ definido por la ecuación

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (1)$$

el cual es una combinación de un proceso $AR(p)$ y un proceso $MA(q)$ se conoce como "Modelo Autoregressivo de medias móviles" (ARMA),
donde $\{\epsilon_t\} \sim RB$ y $\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ son coeficientes fijos (a estimar).

Proceso Autoregressivo de Medias Móviles

- El modelo (1) se puede denotar como $Y_t \sim ARMA(p, q)$.

Proceso Autoregressivo de Medias Móviles

- El modelo (1) se puede denotar como $Y_t \sim ARMA(p,q)$.
- Equivalentemente, se puede definir el proceso $ARMA(q)$ a partir de los operadores de rezago como:

$$Y_t \Phi_p(B) = \epsilon_t \Theta_q(B) \tag{2}$$

donde $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ y $\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$ son los polinomios autoregressivos y de medias móviles respectivamente.

Proceso Autoregressivo de Medias Móviles

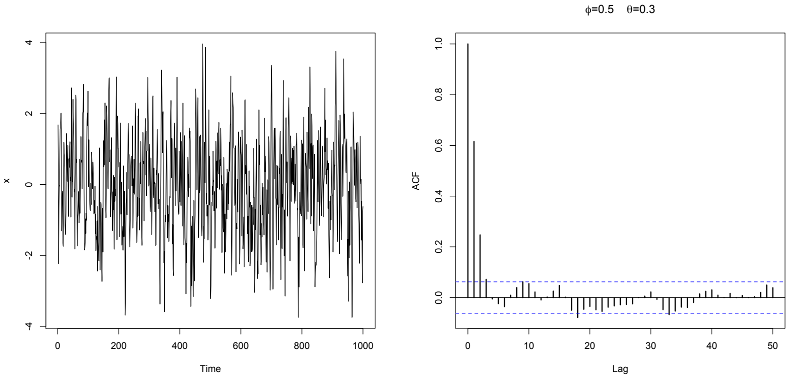
- **Nota:** $Y_t \sim ARMA(p, q)$ será causal e invertible, si las raices de $\Phi_p(B) = 0$ y $\Theta_q(B) = 0$ están fuera del circulo unitario.

Proceso Autoregressivo de Medias Móviles

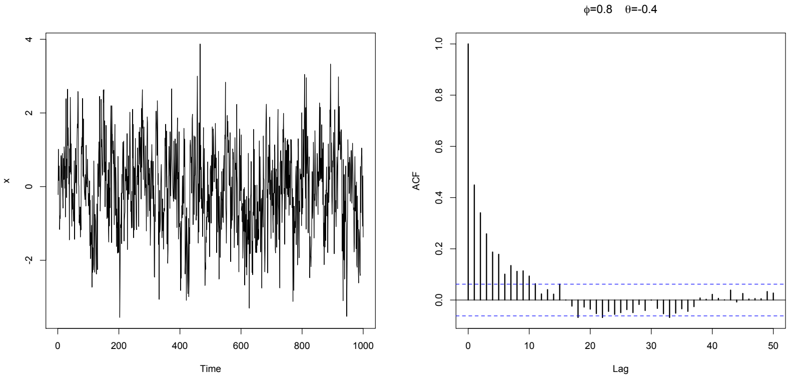
- **Nota:** $Y_t \sim ARMA(p, q)$ será causal e invertible, si las raices de $\Phi_p(B) = 0$ y $\Theta_q(B) = 0$ están fuera del circulo unitario.
- **Nota 2:** Se puede identificar el proceso ARMA apropiado para nuestros datos usando la ACF y la PACF bajo la siguiente estructura,

Modelo	ACF	PACF
AR(p)	Decaim. Exp	$0 \quad \forall k > p$
MA(q)	$0 \quad \forall k > q$	Decaim. Exp
ARMA(p,q)	Decaim. Exp	Decaim. Exp

Proceso Autoregressivo de Medias Móviles



Proceso Autoregressivo de Medias Móviles



Representación de Wold

- Si las raices de $\Phi_p(B) = 0$ están fuera del circulo unitaria, el proceso $Y_t \sim ARMA(p, q)$ será causal, luego,

$$\begin{aligned} Y_t \Phi_p(B) &= \epsilon_t \Theta_q(B) \\ Y_t &= \epsilon_t \frac{\Theta_q(B)}{\Phi_p(B)} \end{aligned}$$

Representación de Wold

- Si las raices de $\Phi_p(B) = 0$ están fuera del circulo unitaria, el proceso $Y_t \sim ARMA(p, q)$ será causal, luego,

$$\begin{aligned} Y_t \Phi_p(B) &= \epsilon_t \Theta_q(B) \\ Y_t &= \epsilon_t \frac{\Theta_q(B)}{\Phi_p(B)} \end{aligned}$$

- Podemos definir,

$$\Psi_\infty(B) = \frac{\Theta_q(B)}{\Phi_p(B)} \tag{3}$$

Representación de Wold

- $\Psi_\infty(B)$ es el polinomio de la representación de Wold del proceso ARMA.

Representación de Wold

- $\Psi_{\infty}(B)$ es el polinomio de la representación de Wold del proceso ARMA.
- El polinomio $\Psi_{\infty}(B)$ se define como

$$\Psi_{\infty}(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \tag{4}$$

Representación de Wold

- $\Psi_\infty(B)$ es el polinomio de la representación de Wold del proceso ARMA.
- El polinomio $\Psi_\infty(B)$ se define como

$$\Psi_\infty(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \tag{4}$$

- Luego, la representación de Wold (o $MA(\infty)$) se define como

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \tag{5}$$

Representación de Wold

- **Ejemplo:** Encuentre la representación de Wold de un proceso ARMA(1,1)

Representación $AR(\infty)$

- Por otro lado podemos encontrar la representación $AR(\infty)$ de un proceso ARMA.

Representación $AR(\infty)$

- Por otro lado podemos encontrar la representación $AR(\infty)$ de un proceso ARMA.
- Sea $Y_t \sim ARMA(p, q)$. Si las raices del polinomio $\Theta_q(B) = 0$ están fuera del circulo unitario, se dice que el proceso es invertible. Luego,

$$\begin{aligned} Y_t \Phi_p(B) &= \epsilon_t \Theta_q(B) \\ Y_t \frac{\Phi_p(B)}{\Theta_q(B)} &= \epsilon_t \end{aligned}$$

Representación $AR(\infty)$

- Por otro lado podemos encontrar la representación $AR(\infty)$ de un proceso ARMA.
- Sea $Y_t \sim ARMA(p,q)$. Si las raices del polinomio $\Theta_q(B) = 0$ están fuera del circulo unitario, se dice que el proceso es invertible. Luego,

$$\begin{aligned} Y_t \Phi_p(B) &= \epsilon_t \Theta_q(B) \\ Y_t \frac{\Phi_p(B)}{\Theta_q(B)} &= \epsilon_t \end{aligned}$$

- Podemos definir,

$$\Pi_\infty(B) = \frac{\Phi_p(B)}{\Theta_q(B)} \tag{6}$$

Representación $AR(\infty)$

- $\Pi_\infty(B))$ es el polinomio de la representación $AR(\infty)$ del proceso ARMA.

Representación $AR(\infty)$

- $\Pi_{\infty}(B))$ es el polinomio de la representación $AR(\infty)$ del proceso ARMA.
- El polinomio $\Pi_{\infty}(B)$ se define como

$$\Pi_{\infty}(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j \tag{7}$$

Representación $AR(\infty)$

- $\Pi_\infty(B))$ es el polinomio de la representación $AR(\infty)$ del proceso ARMA.
- El polinomio $\Pi_\infty(B)$ se define como

$$\Pi_\infty(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j \tag{7}$$

- Luego, la representación $AR(\infty)$ se define como

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} = \epsilon_t \tag{8}$$

Representación de Wold

- **Ejemplo 2:** Considere el proceso $\{Y_t\} \sim ARMA(1,1)$ definido por:
$$Y_t + 0.6Y_{t-1} = \epsilon_t + 0.4\epsilon_{t-1} \tag{9}$$

Representación de Wold

- **Ejemplo 2:** Considere el proceso $\{Y_t\} \sim ARMA(1,1)$ definido por:

$$Y_t + 0.6Y_{t-1} = \epsilon_t + 0.4\epsilon_{t-1} \tag{9}$$

  1. Es el proceso causal e invertible?

Representación de Wold

- **Ejemplo 2:** Considere el proceso $\{Y_t\} \sim ARMA(1,1)$ definido por:
$$Y_t + 0.6Y_{t-1} = \epsilon_t + 0.4\epsilon_{t-1} \tag{9}$$

1. Es el proceso causal e invertible?
2. Encuentre la representación de Wold del proceso.

Representación de Wold

- **Ejemplo 2:** Considere el proceso $\{Y_t\} \sim ARMA(1,1)$ definido por:
$$Y_t + 0.6Y_{t-1} = \epsilon_t + 0.4\epsilon_{t-1} \tag{9}$$

1. Es el proceso causal e invertible?
2. Encuentre la representación de Wold del proceso.
3. Encuentre la representación $AR(\infty)$ del proceso

Simplificación modelo ARMA

- Sea $Y_t \sim ARMA(p,q)$, entonces:

$$Y_t \Phi_p(B) = \epsilon_t \Theta_q(B) \tag{10}$$

donde $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ y $\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$.

Simplificación modelo ARMA

- Sea $Y_t \sim ARMA(p,q)$, entonces:

$$Y_t \Phi_p(B) = \epsilon_t \Theta_q(B) \tag{10}$$

  donde $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ y
  $\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$.

- Si los polinomios $\Phi_p(B)$ y $\Theta_q(B)$ tienen raices en común, significa que hay redundancia de parametros, lo que complica innecesariamente el análisis posterior del modelo. Entonces el modelo debería ser simplificado.

Simplificación modelo ARMA

- **Ejemplo 3:** Considere el siguiente modelo ARMA

$$Y_t = Y_{t-1} - 0.21 Y_{t-2} + \epsilon_t - 0.7\epsilon_{t-1} \tag{11}$$

¿Se puede simplificar este modelo?

Modelo ARMA General

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice ARMA(p,q) con media μ, si $X_t = Y_t - \mu$ es un proceso ARMA(p,q). Es decir puede ser escrito como,

$$(Y_t - \mu)\Phi_p(B) = \epsilon_t \Theta_q(B)$$

Modelo ARMA General

- Un proceso $\{X_t\}$ se dice ARMA(p,q) con media μ, si $X_t = Y_t - \mu$ es un proceso ARMA(p,q). Es decir puede ser escrito como,

$$(Y_t - \mu)\Phi_p(B) \quad = \quad \epsilon_t \Theta_q(B)$$

- o bien,

$$(Y_t - \mu) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu) - \ldots - \phi_p(Y_{t-p} - \mu) \quad = \quad \epsilon_t \Theta_q(B)$$