Clase 9 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

May 26, 2025

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA
- Representación de Wold

Conceptos Previos

- Proceso Lineal General
- Proceso ARMA
- Representación de Wold
- Representación $AR(\infty)$

Estimación de Procesos ARMA

- Existen diversos métodos para realizar la estimación de parámetros de los modelos ARMA.

Estimación de Procesos ARMA

- Existen diversos métodos para realizar la estimación de parámetros de los modelos ARMA.
  - Método de los Momentos (Yule-Walker)

Estimación de Procesos ARMA

- Existen diversos métodos para realizar la estimación de parámetros de los modelos ARMA.
  - Método de los Momentos (Yule-Walker)
  - Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios

Estimación de Procesos ARMA

- Existen diversos métodos para realizar la estimación de parámetros de los modelos ARMA.
  - Método de los Momentos (Yule-Walker)
  - Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios
  - Método de Mínimos Cuadrados Ponderados

Estimación de Procesos ARMA

- Existen diversos métodos para realizar la estimación de parámetros de los modelos ARMA.
  - Método de los Momentos (Yule-Walker)
  - Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios
  - Método de Mínimos Cuadrados Ponderados
  - Método de Máxima Verosimilitud

Estimadores de Yule-Walker

- Los estimadores de Yule-Walker también se conocen como el método de los momentos en el cual los momentos teóricos se igualan a los momentos empíricos.

Estimadores de Yule-Walker

- Los estimadores de Yule-Walker también se conocen como el método de los momentos en el cual los momentos teóricos se igualan a los momentos empíricos.
- El procedimiento consiste en escribir los coeficientes de un modelo ARMA en término de las autocorrelaciones que son conocidas.

Estimadores de Yule-Walker

- Los estimadores de Yule-Walker también se conocen como el método de los momentos en el cual los momentos teóricos se igualan a los momentos empíricos.
- El procedimiento consiste en escribir los coeficientes de un modelo ARMA en término de las autocorrelaciones que son conocidas.
- Por ejemplo, si $\{Y_t\} \sim ARMA(p, q)$,

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t$$

Multiplicamos la ecuación anterior por Y_{t-j}, $j = 0, \ldots, p$

Estimadores de Yule-Walker

- **Ejemplo:** Sea Y_t un proceso AR(1) definido por:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Encuentre el estimador de Yule-Walker de los parámetros $\lambda = [\phi, \sigma^2]'$.

Estimadores de Yule-Walker

- Supongamos Y_t es un proceso AR(p) causal, es decir,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

Estimadores de Yule-Walker

- Supongamos Y_t es un proceso AR(p) causal, es decir,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

  donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

- Sea $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)'$ y $\gamma = (\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(p))'$. Se puede mostrar que,

$$\hat{\sigma}^2 = \gamma(0) - \phi'\gamma \tag{1}$$

Estimadores de Yule-Walker

- Supongamos Y_t es un proceso AR(p) causal, es decir,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

  donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

- Sea $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)'$ y $\gamma = (\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(p))'$. Se puede mostrar que,

$$\hat{\sigma}^2 = \gamma(0) - \phi'\gamma \tag{1}$$

- Además, sea $\Gamma_p = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^{p}$, los estimadores de Yule-Walker resuelven el sistema

$$\Gamma_p \phi = \gamma$$

  o equivalentemente

$$\phi = \Gamma_p^{-1} \gamma$$

Estimadores de Yule-Walker

- **Nota:** Se puede usar la función de autocorrelación $\rho(k)$ en vez de la función de autocorrelacion $\gamma(k)$ para simplificar los calculos.

Estimadores de Yule-Walker

- **Nota:** Se puede usar la función de autocorrelación $\rho(k)$ en vez de la función de autocorrelacion $\gamma(k)$ para simplificar los calculos.
- Sea $\rho = (\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(p))'$. Se puede mostrar que,

$$\phi = R_p^{-1} \rho$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \gamma(0)[1 - \rho' R_p^{-1} \rho] \tag{2}$$

donde $R_p = [\rho(i-j)]_{i,j=1}^{p}$

Procedimiento

1. Obtenemos los estimadores de la función de autocovarianza como,

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}{n}$$

Procedimiento

1. Obtenemos los estimadores de la función de autocovarianza como,
$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}{n}$$
2. Obtenemos los estimadores de Yule-Walker de los paramétros del modelo,
$$\hat{\phi} = \hat{\Gamma_p}^{-1} \hat{\gamma}$$

Procedimiento

1. Obtenemos los estimadores de la función de autocovarianza como,
$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k}}{n}$$
2. Obtenemos los estimadores de Yule-Walker de los paramétros del modelo,
$$\hat{\phi} = \hat{\Gamma_p}^{-1} \hat{\gamma}$$
3. Obtenemos el estimador de σ^2
$$\hat{\sigma}^2 = \gamma(\hat{0}) - \hat{\phi}' \hat{\gamma}$$

Estimadores de Yule-Walker

- **Teorema:** Si $\{X_t\}$ es un proceso causal AR(p) y $\hat{\phi}$ es el estimador de Yule Walker de ϕ entonces,

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \sim AN(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1})$$

donde Γ_p es la matriz de varianza covarianza de orden p definida por $[\gamma(i-j)]_{i,j=1}^{p}$

Significancia de los parámetros

- Para contrastar la hipótesis nula $\phi_k = 0$ frente a la alternativa de que $\phi_k \neq 0$ construimos el test-t

$$t = \frac{\hat{\phi}_k}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\phi}_k]}}$$

que asintóticamente sigue una distribución N(0, 1), siendo $\mathbb{V}[\hat{\phi}_k] = a_{kk}/n$ donde $a_{kk} = diag(\hat{\sigma}^2 \hat{\Gamma}_p^{-1})$

Significancia de los parámetros

- Para contrastar la hipótesis nula $\phi_k = 0$ frente a la alternativa de que $\phi_k \neq 0$ construimos el test-t

$$t = \frac{\hat{\phi}_k}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\phi}_k]}}$$

que asintóticamente sigue una distribución N(0, 1), siendo $\mathbb{V}[\hat{\phi}_k] = a_{kk}/n$ donde $a_{kk} = diag(\hat{\sigma}^2 \hat{\Gamma}_p^{-1})$

- La hipótesis se rechaza si,

$$\left| \frac{\hat{\phi}_k}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\phi}_k]}} \right| > z_{1-\alpha/2}$$

en donde $z_{1-\alpha/2}$ es el valor crítico tal que $\mathbb{P}(Z > z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- Un método alternativo para estimar los parámetros de un modelo AR(p) es a partir de un modelo de regresión lineal para Y_t con regresores $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p}$ y error ϵ_t.

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- Un método alternativo para estimar los parámetros de un modelo AR(p) es a partir de un modelo de regresión lineal para Y_t con regresores $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p}$ y error ϵ_t.
- Dadas las observaciones $Y_1, \ldots, Y_N$ el modelo de regresión se puede escribir de forma compacta en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} Y_{p+1} \\ Y_{p+2} \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p & Y_{p-1} & Y_{p-2} & \ldots & Y_1 \\ Y_{p+1} & Y_p & Y_{p-1} & \ldots & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{N-1} & Y_{N-2} & Y_{N-3} & \ldots & Y_{N-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{p+1} \\ \epsilon_{p+2} \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}\Phi + Z \tag{3}$$

con $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)$ y $Z = (\epsilon_{p+1}, \epsilon_{p+2}, \ldots, \epsilon_N)$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- El estimador de mínimos cuadrados (OLS) está dado por

$$\hat{\Phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- El estimador de mínimos cuadrados (OLS) está dado por

$$\hat{\Phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- Se puede demostrar que $\frac{(X^T X)}{N}$ converge a $\hat{\Gamma}_p$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- El estimador de mínimos cuadrados (OLS) está dado por

$$\hat{\Phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- Se puede demostrar que $\frac{(X^T X)}{N}$ converge a $\hat{\Gamma}_p$
- Se puede demostrar que $\frac{(X^T Y)}{N}$ converge a $\hat{\gamma}_p$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- El estimador de mínimos cuadrados (OLS) está dado por

$$\hat{\Phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- Se puede demostrar que $\frac{(X^T X)}{N}$ converge a $\hat{\Gamma}_p$
- Se puede demostrar que $\frac{(X^T Y)}{N}$ converge a $\hat{\gamma}_p$
- Además, b.c.c.r, $\sqrt{N}(\hat{\Phi} - \Phi)$ es asintóticamente eficiente y normal con media cero y varianza $\sigma^2 \Gamma_p^{-1}$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- El estimador de mínimos cuadrados (OLS) está dado por

$$\hat{\Phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- Se puede demostrar que $\frac{(X^T X)}{N}$ converge a $\hat{\Gamma}_p$
- Se puede demostrar que $\frac{(X^T Y)}{N}$ converge a $\hat{\gamma}_p$
- Además, b.c.c.r, $\sqrt{N}(\hat{\Phi} - \Phi)$ es asintóticamente eficiente y normal con media cero y varianza $\sigma^2 \Gamma_p^{-1}$
- **Por lo tanto, el estimador de mínimos cuadrados es asintóticamente equivalente al estimador de Yule-Walker**

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- **Teorema:** Si $\{X_t\}$ es un proceso causal AR(p) el estimador de mínimos cuadrados $\hat{\Phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ satisface

$$\hat{\Phi} - \Phi \overset{a}{\sim} N_p(0, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$$

y

$$\hat{s}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

donde $\sigma^2 = \frac{(\hat{Z}^T \hat{Z})}{N-p}$, $p = dim(X)$ y $\hat{Z} = \mathrm{Y} - \mathrm{X}\Phi$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- **Ejemplo** Para un proceso AR(1)

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, N$$

$|\phi| < 1$ y $Z_t \sim RB(0, \sigma^2)$, los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios de ϕ y σ^2 están dados por

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{N} Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{N-1} Y_t^2} \quad s^2 = \frac{\sum_{t=2}^{N} (Y_t - \hat{\Phi} Y_{t-1})^2}{N-1}$$

Cuya distribución asintótica está dada por,

$$(\hat{\phi} - \phi) \overset{a}{\sim} N_p \left(0, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{N-1} Y_t^2} \right)$$

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- **Ejemplo** Considere $\sum_{t=2}^{N} Y_t Y_{t-1} = 1255.5$, $\sum_{t=1}^{N-1} Y_t^2 = 2570.99$, $\sum_{t=2}^{N}(Y_t - \hat{\Phi} Y_{t-1}) = 2732.93$ y $N = 2000$. Encuentre $\hat{\phi}$ y S^2.
  Además, verifique si el parámetro estimado es significativamente distinta de cero.

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- Observaciones

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- **Observaciones**
  - En la práctica, $\sigma^2(X^TX)^{-1}$ puede ser aproximado por $s^2(X^TX)^{-1}$ luego para muestras grandes se tiene que $\hat{\Phi}$ es aproximadamente Normal $(\hat{\Phi}, s^2(X^TX)^{-1})$. Este resultado permite realizar test t o test F sobre los coeficientes del modelo.

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- **Observaciones**
  - En la práctica, $\sigma^2(X^TX)^{-1}$ puede ser aproximado por $s^2(X^TX)^{-1}$ luego para muestras grandes se tiene que $\hat{\Phi}$ es aproximadamente Normal $(\hat{\Phi}, s^2(X^TX)^{-1})$. Este resultado permite realizar test t o test F sobre los coeficientes del modelo.
  - El estimador OLS en general no entrega coeficientes $\hat{\Phi}$ tal que Y_t sea causal. En particular, en un proceso AR(1), en contraste con el estimador de Yule-Walker puede ocurrir que $|\hat{\phi}|$ sea mayor que uno aunque el verdadero parámetro sea menor que uno. Sin embargo, el estimador de mínimos cuadrados es preferible en la práctica para muestras pequeñas ya que ofrece sesgos más pequeños que los estimadores de Yule- Walker, especialmente cuando las raíces de $\Phi(B)$ están cerca del círculo unitario.

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- Observaciones

Estimación Mínimos Cuadrados Ordinarios

- **Observaciones**
  - Para un proceso ARMA(p,q), $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \nu_t$, donde $\nu_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}$, el modelo escrito en la forma de regresión lineal queda $\mathrm{Y} = \mathrm{X}\Phi + \nu$ con Y,X,Φ definidos igual que un modelo AR, pero,

$$\mathbb{V}(\nu) \neq \sigma^2 I = \Sigma_{\nu\nu}(\theta)$$

Por lo tanto, el mejor estimador para Φ está dado por el estimador de mínimos cuadrados Generalizado (GLS),

$$\hat{\Phi} = \left(X^T \Sigma_{\nu\nu}(\theta)^{-1} X\right)^{-1} X^T \Sigma_{\nu\nu}(\theta)^{-1} Y$$

,
donde $\Sigma_{\nu\nu}(\theta) = \sigma^2 \left(X^T \Sigma_{\nu\nu}(\theta)^{-1} X\right)^{-1}$. Note que $\hat{\Phi}$ depende de θ, luego para encontrar el GLS se requiere de métodos numéricos.

Estimación de Máxima Verosimilitud

- Suponga $\{Y_t\} \sim ARMA(p, q)$, entonces

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

definamos el vector $\mathrm{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)' \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos $\lambda = (\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma^2)' \in \mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^+$ el vector de parámetros del modelo ARMA(p, q).

Estimación de Máxima Verosimilitud

- Supongamos que las observaciones $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ tienen distribución Gaussiana con la siguiente matriz de varianzas covarianzas,

$$\Gamma_\lambda = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^{n} = (Cov(Y_i, Y_j))_{i,j=1}^{n}$$

Estimación de Máxima Verosimilitud

- Supongamos que las observaciones $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ tienen distribución Gaussiana con la siguiente matriz de varianzas covarianzas,

$$\Gamma_\lambda = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^{n} = (Cov(Y_i, Y_j))_{i,j=1}^{n}$$

- Como este proceso está centrado en cero, entonces la función de verosimilitud esta dada por

$$L(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} |\Gamma_\lambda|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} Y' \Gamma_\lambda^{-1} Y \right\}$$

Estimación de Máxima Verosimilitud

- Supongamos que las observaciones $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ tienen distribución Gaussiana con la siguiente matriz de varianzas covarianzas,

$$\Gamma_\lambda = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^n = (Cov(Y_i, Y_j))_{i,j=1}^n$$

- Como este proceso está centrado en cero, entonces la función de verosimilitud esta dada por

$$L(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} |\Gamma_\lambda|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} Y' \Gamma_\lambda^{-1} Y \right\}$$

- Luego la función de log-verosimilitud del proceso está dada por:

$$\mathcal{L}(\lambda) = -\frac{1}{2} log|\Gamma_\lambda| - \frac{1}{2} Y' \Gamma_\lambda^{-1} Y$$

Estimación de Máxima Verosimilitud

- **Teorema** Suponga que $\{Y_t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso ARMA(p,q) causal e invertible, es decir

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

con $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y si $\Phi(.)$ y $\Theta(.)$ no tienes raices en común, entonces sea $\hat{\beta} = (\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_q)'$ el estimador de máxima verosimilitud, entonces,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \overset{a}{\sim} N(0, \mathbb{V}(\beta))$$

Estimación de Máxima Verosimilitud

- donde la matriz de covarianza asintotica se calcula como sigue a continuación,

$$\mathbb{V}(\beta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbb{E}(U_t U_t') & \mathbb{E}(U_t V_t') \\ \mathbb{E}(V_t U_t') & \mathbb{E}(V_t V_t') \end{bmatrix}^{-1}$$

donde $U_t = (U_t, \ldots, U_{t+1-p})'$, $V_t = (V_t, \ldots, V_{t+1-q})'$ y $\{U_t\}$, $\{V_t\}$ son procesos autorregresivos del tipo,

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) U_t &= a_t \\ (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_p B^q) V_t &= a_t \end{aligned}$$

donde los $\{a_t\} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Para el caso $p = 0$, $\mathbb{V}(\beta) = \sigma^2[\mathbb{E}(V_t V_t')]^{-1}$ y para $q = 0$ $\mathbb{V}(\beta) = \sigma^2[\mathbb{E}(U_t U_t')]^{-1}$

Estimación de Máxima Verosimilitud

- **Ejemplo** Sea $Y_t \sim MA(1)$, tal que $Y_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$, con $|\theta| < 1$. Encuentre la distribución asintótica del estimador máximo verosímil de (θ).