Procesos no Estacionarios

Clase 11

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile

Jun 28, 2023

Contenidos

Raiz Unitaria

- En un proceso $y_t \sim AR(1)$ definido por $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$, si $|\phi| < 1$ entonces $\{y_t\}$ es estacionario.
- Que sucede si $\phi = 1$?

Raiz Unitaria

- En un proceso $y_t \sim AR(1)$ definido por $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$, si $|\phi| < 1$ entonces $\{y_t\}$ es estacionario.
- Que sucede si $\phi = 1$?
- Tenemos que $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$. En este caso decimos que y_t es un proceso de caminata aleatoria.
- Un proceso de caminata aleatoria es un proceso no estacionario.

Raiz Unitaria

- En un proceso $y_t \sim AR(1)$ definido por $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$, si $|\phi| < 1$ entonces $\{y_t\}$ es estacionario.
- Que sucede si $\phi = 1$?
- Tenemos que $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$. En este caso decimos que y_t es un proceso de caminata aleatoria.
- Un proceso de caminata aleatoria es un proceso no estacionario.
- Los test de Raíz unitaria permiten verificar la siguiente hipótesis:
$$H_0 : \phi = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \phi < 1$$
- o equivalentemente,

$$H_0 : \text{Caminata Aleatoria} \quad \text{vs} \quad \text{Proceso Estacionario}$$

el más conocido de estos test, es el test de Dickey Fuller.

Modelo ARIMA

- Sea $x_t = (1 - B)^d y_t$ y suponga que $x_t \sim ARMA(p, q)$, es decir

$$\Phi_p(B) x_t = \Theta_q(B) \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$, entonces podemos reescribir el proceso como,

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d y_t = \Theta_q(B) \epsilon_t$$

- Este proceso $\{y_t\}$ se conoce como "Autoregresivo integrado de medias móviles" y se denota como $\{y_t\} \sim$ ARIMA(p,d,q)

Modelos ARIMA estacionales.

- Previamente se discutió la descomposición clásica de una serie de tiempo $Y_t = N_t + T_t + S_t + \epsilon_t$, donde T_t es la componente de tendencia, S_t es la componente estacional y ϵ_t la componente aleatoria. Sin embargo, a veces no se puede esperar que la componente estacional se repita exactamente en el mismo modo ciclo a ciclo. Por esta razón se proponen los modelos SARIMA para permitir la aleatoriedad en la forma de la estacionalidad ciclo a ciclo.

Modelos ARIMA estacionales.

- Supongamos que se tienen r años de datos mensuales tabulados como muestra la tabla siguiente:

	Meses			
Año	1	2	...	12
1	Y_1	Y_2	...	Y_{12}
2	Y_{13}	Y_{14}	...	Y_{24}
3	Y_{25}	Y_{26}	...	Y_{36}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
r	$Y_{1+12(r-1)}$	$Y_{2+12(r-1)}$	...	$Y_{12+12(r-1)}$

  Cada columna en esta tabla puede ser considerada en si misma como una realización de una serie de tiempo.

Modelos ARIMA estacionales.

- Suponga que cada una de estas 12 series es generada por el mismo proceso ARMA(P,Q), o más específicamente que la serie correspondiente al mes j, dada por Y_{j+12t}, con $t = 0, 1, \ldots, r-1$ y $j = 1, 2, \ldots, 12$ satisface la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} Y_{j+12t} &= \Phi_1 Y_{j+12(t-1)} + \ldots + \Phi_P Y_{j+12(t-P)} + U_{j+12t} \\ &+ \Theta_1 U_{j+12(t-1)} + \ldots + \Theta_Q U_{j+12(t-Q)} \end{aligned}$$

donde ϵ_{j+12t}, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 12$ es $\mathrm{RB}(0, \sigma_U^2)$. Como se supone el mismo modelo para cada mes, escribimos para cada t escribimos el modelo en la forma siguiente,

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-12} + \ldots + \Phi_P Y_{t-12P} + U_t + \Theta_1 U_{t-12} + \ldots + \Theta_Q U_{t-12Q}$$

Modelos ARIMA estacionales

- Sean $\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \ldots - \Phi_P z^P$ y $\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + \ldots + \Theta_Q z^Q$, entonces el modelo para cada mes puede ser escrito como,

$$\Phi(B^{12}) Y_t = \Theta(B^{12}) U_t$$

Modelos ARIMA estacionales

- Sean $\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \ldots - \Phi_P z^P$ y $\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + \ldots + \Theta_Q z^Q$, entonces el modelo para cada mes puede ser escrito como,

$$\Phi(B^{12})Y_t = \Theta(B^{12})U_t$$

- Note que $\mathbb{E}(U_t U_{t+k})$ no es cero excepto cuando k es un múltiplo de 12. Esto quiere decir que uno espera que las doce series estén correlacionadas entre si. Para incorporar esta dependencia entre series se asume que $U_t \sim \text{ARMA}(p,q)$.

$$\phi(B)U_t = \theta(B)\epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Combinado estas dos últimas ecuaciones se tiene

$$\Phi(B^{12})\phi(B)Y_t = \Theta(B^{12})\theta(B)\epsilon_t$$

,

Este es el modelo estacional SARMA$(p,q) \times (P,Q)_{12}$

Modelo SARIMA

- Decimos que $\{y_t\}$ sigue un proceso SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ si puede escribirse como,

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)\epsilon_t \quad (1)$$

- donde

$$\begin{aligned}
\phi_p(B) &= 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p \\
\Phi_P(B^S) &= 1 - \Phi_1 B^S - \ldots - \Phi_P B^{PS} \\
\theta_q(B) &= 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q \\
\Theta_Q(B^S) &= 1 + \Theta_1 B + \ldots + \Theta_Q B^{QS}
\end{aligned}$$

Modelo SARIMA

- Decimos que $\{y_t\}$ sigue un proceso SARIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_S$ si puede escribirse como,

Polinomio Autoregresivo Orden de Integracion Polinomio de Medias Moviles

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)\epsilon_t \quad (2)$$

- donde

Polinomio Autoregresivo Estacional Orden de Integracion Estacional Polinomio de Medias Moviles Estacional

$$\begin{aligned}
\phi_p(B) &= 1-\phi_1 B-\ldots-\phi_p B^p \\
\Phi_P(B^S) &= 1-\Phi_1 B^S-\ldots-\Phi_P B^{PS} \\
\theta_q(B) &= 1+\theta_1 B+\ldots+\theta_q B^q \\
\Theta_Q(B^S) &= 1+\Theta_1 B+\ldots+\Theta_Q B^{QS}
\end{aligned}$$

Metodología de Box y Jenkins

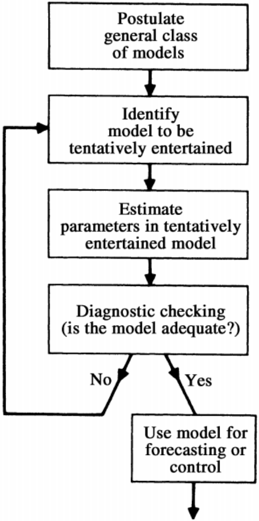
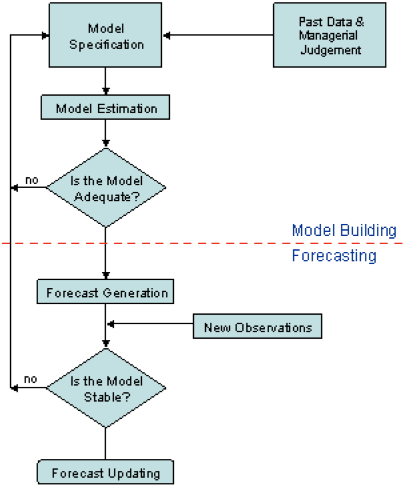


FIGURE 1.7 Stages in the iterative approach to model building.

Metodología de Box y Jenkins



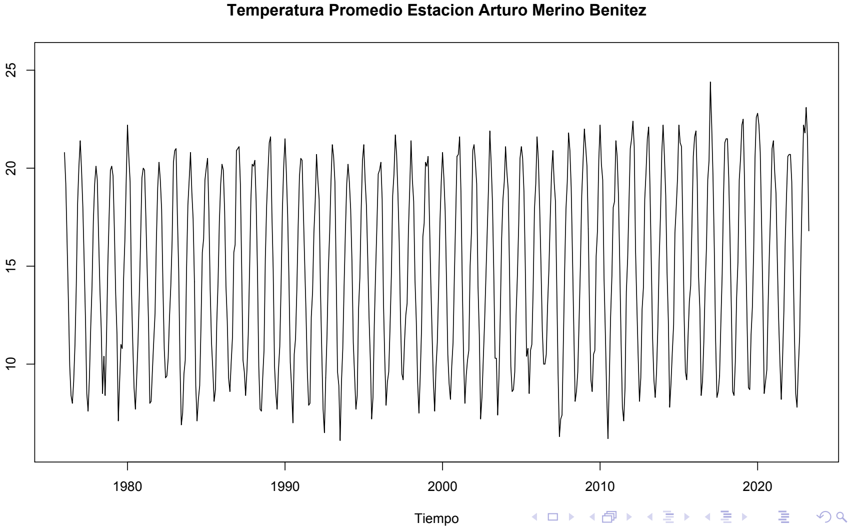
Forecasting System:
The Model-Building and The Forecasting Phases

Librerias de Series Temporales en R

- **TSA**: Cryer and Chan (2010, 2nd ed) Time series analysis with applications in R
- **astsa**: Shumway and Stoffer (2017, 4th ed) Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples
- **forecast**: by Rob Hyndman et al.
- **fUnitRoots**: by Diethelm Wuertz et al.
- **rugarch**: by Alexios Galanos
- **lmtest**: by Torsten Hothorn et al.

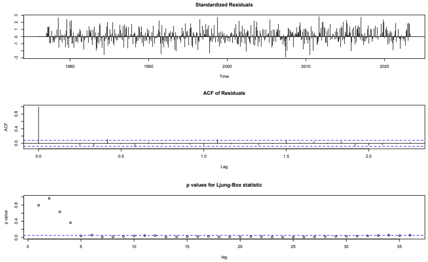
Aplicación

- Serie de Temperatura Promedio Mensual medida en la estación Arturo Merino Benitez entre Enero de 1976 y Abril de 2023.



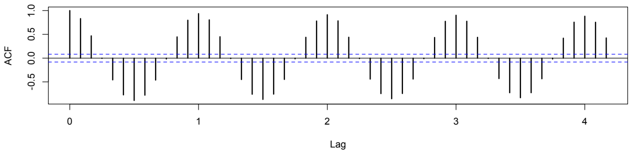
Función Auto-ARIMA

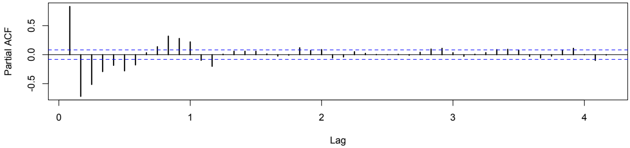
```
model=auto.arima(Temp)
Series: Temp
ARIMA(2,0,2)(0,1,1)[12]
Coefficients:
         ar1      ar2      ma1     ma2     sma1
      1.4955  -0.5991  -1.2706  0.4657  -0.8675
s.e.  0.2599   0.2224   0.2723  0.1886   0.0272
sigma^2 = 0.6877:  log likelihood = -690.89
AIC=1393.78   AICc=1393.93   BIC=1419.7
```



Aplicación

```
y=log(Temp)
par(mfrow=c(2,1))
acf(y,lag.max=50,lwd=2,main="")
pacf(y,lag.max=50,lwd=2,main="")
```





Test de Raíz Unitaria

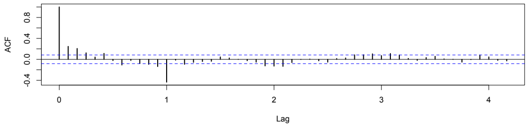
```
require(fUnitRoots)
adfTest(y,lags = 1,type = c("nc"))

Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test

Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 1
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: -1.7525
  P VALUE:
    0.07992
```

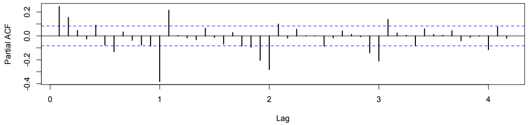
```
adfTest(y,lags = 12,type = c("nc"))

Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test

Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 12
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: 0.4029
  P VALUE:
    0.7447
```

Test de Raíz Unitaria

Serie	X_t	∇X_t	$\nabla_{12} X_t$	$\nabla_{12}\nabla X_t$	$\nabla^2 X_t$	$\nabla_{12}^2 \nabla X_t$
adfTest(., lags = 1)	0.08	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
adfTest(., lags = 12)	0.75	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Stdev	0.116	0.039	**0.009**	0.014	0.033	0.027

- La solucion de minima varianza es $d = 0$ y $D = 1$.





Modelo Propuesto

- SARIMA$(1,0,1) \times (0,1,1)_{12}$

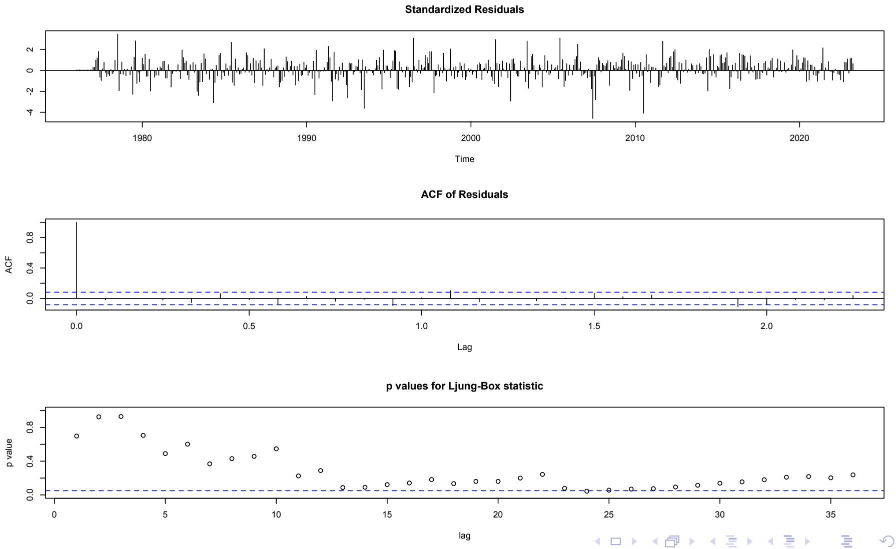
```
model4=arima(y,order=c(1,0,1),seasonal=list(order=c(0,1,1),period=1
summary(model4)
Call:
arima(x = y, order = c(1, 0, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 1)
, period = 12))
Coefficients:
         ar1      ma1     sma1
      0.7471  -0.5213  -0.8958
s.e.  0.0836   0.1033   0.0264
```

- Significancia de Parametros

```
require(lmtest)
coeftest(model4)
z test of coefficients:

      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
ar1   0.747089   0.083583   8.9383 < 2.2e-16 ***
ma1  -0.521283   0.103272  -5.0477 4.472e-07 ***
sma1 -0.895826   0.026441 -33.8801 < 2.2e-16 ***
```

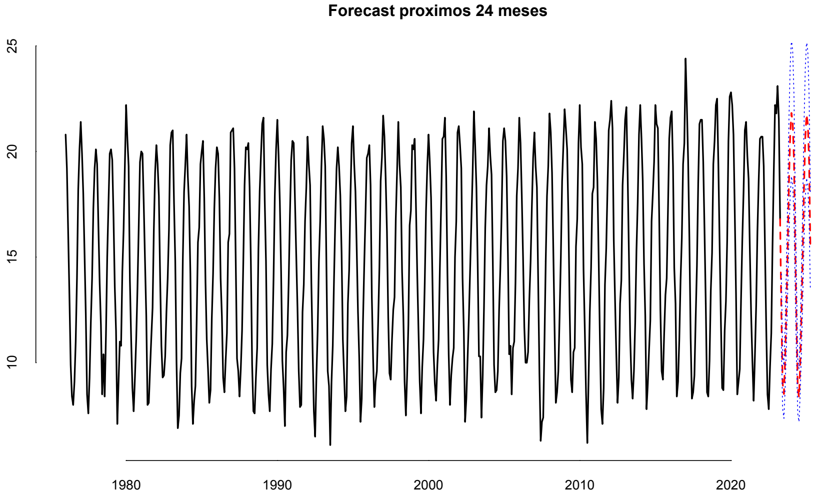
Diagnostico del Modelo

```
tsdiag(model4,gof.lag=36)
```



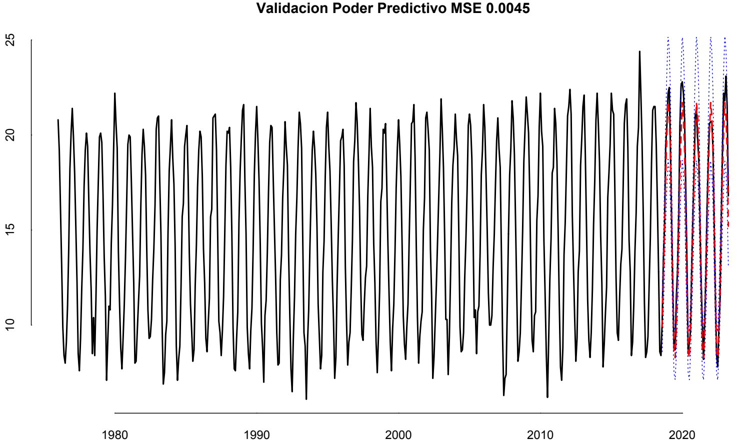
Forecast

```
Forecast<-predict(model4,n.ahead=24)
```



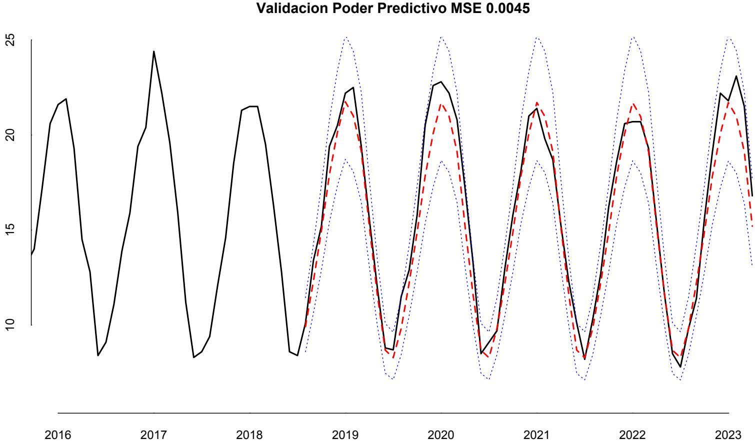
Validacion

- Para evaluar la capcidad predictiva del modelo propuesto, usaremos el primer 90 % de la serie para entrenar el modelo propuesto y el 10 % para validarlo.



Validacion

- Para evaluar la capcidad predictiva del modelo propuesto, usaremos el primer 90 % de la serie para entrenar el modelo propuesto y el 10 % para validarlo.



felipe.elorrieta@usach.cl

@felipeelorrieta