Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C
Facultad de Ciencia
Ingeniería Estadística

Guia 3: Series Cronológicas

Profesor: Felipe Elorrieta L. *Ayudante: Felipe Silva G.*

- **Modelos ARMA**

1. Sea el proceso ARMA(2,1), definido por

$$X_t = 0.75X_{t-1} + 0.125X_{t-2} + \epsilon_t - 0.2\epsilon_{t-1}$$

   a) Determine si X_t es causal e invertible
   b) Calcule los 5 primeros coeficientes π_j y ψ_j
   c) Obtenga la función de autocovarianza del proceso.

2. Determine cuál de los siguientes procesos ARMA son estacionarios y/o invertibles. (En cada caso $\{\epsilon_t\}$ denota ruido blanco).

   a) $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = \epsilon_t + 0.2\epsilon_{t-1} + 0.7\epsilon_{t-2}$
   b) $X_t + 0.6X_{t-1} = \epsilon_t + 1.2\epsilon_{t-1}$
   c) $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = \epsilon_t$

   Encuentre la representación $MA(\infty)$ y $AR(\infty)$ si corresponde en cada caso.

- **Estimación Modelos ARMA**

3. Considere que la muestra $y_1, \ldots, y_{200}$ satisface el modelo ARMA(1,1)

$$y_t - \phi y_{t-1} = \epsilon - \theta\epsilon_{t-1}$$

   donde ϵ_t es ruido blanco $(0, \sigma^2)$ y suponga que el EMV de (ϕ, θ) es $(0.4, 0.7)$

   a) ¿Son los coeficientes del modelo significativos al 5 %?
   b) Calcule los coeficientes de la expansion de Wold.
   c) Construya una región de confianza para (ϕ, θ) al 95 %.

4. Considere el proceso $\{X_t\} \sim AR(2)$ que satisface

$$X_t - \phi X_{t-1} - \phi^2 X_{t-2} = Z_t \qquad Z_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

   a) Para que valores de ϕ el proceso es causal.
   b) Se considero una muestra de $X_1, \ldots, X_{200}$ y se estimaron los momentos muestrales,

   $$\hat{\gamma}(0) = 6.06, \qquad \hat{\rho}(1) = 0.687,$$

   Encuentre los estimadores de ϕ y σ^2 resolviendo las ecuaciones de Yule-Walker. (Si usted encuentra mas de una soluciones, considere la única que es causal)

5. Sea X_t un proceso MA(2),

$$X_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2}, \quad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

   Demuestre que la distribución asintótica del estimador máximo verosímil de (θ_1, θ_2) está dada por,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \overset{a}{\sim} N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 - \theta_2^2 & -\theta_1(1 + \theta_2) \\ -\theta_1(1 + \theta_2) & 1 - \theta_2^2 \end{bmatrix} \right)$$

- **Predicción en modelos ARMA**

6. Los cambios en las ventas mensuales en una librería siguen un proceso MA(2) de la forma.

$$X_t = \epsilon_t + 0.6\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2}$$

   Si se conocen los valores $X_{20} = 180$, $X_{21} = -120$, $X_{22} = 90$, $X_{23} = 10$

   a) Calcule el pronostico para X_{20} y X_{21} con información hasta $t = 19$ si $\epsilon_{17} = -10$, $\epsilon_{18} = 30$, $\epsilon_{19} = 70$.
   b) Calcule el pronostico para X_{24}, X_{25}, X_{26} y X_{27} con información hasta $t = 23$.

7. Sea el proceso,

$$Y_t = 5 + 0.5Y_{t-1} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1} \quad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

   a) Calcule la media del proceso $\{Y_t\}$.
   b) Discuta la estacionaridad e invertibilidad del proceso.
   c) Discuta si el proceso $\{Y_t\}$ puede ser aproximado por un proceso MA(q). En caso afirmativo, cuales valores de q elegiría?. Justifique su respuesta.
   d) Calcule la predicción de $\{Y_{n+2}\}$ basado en la información hasta el instante n.

8. Considere un proceso $AR(1)$ estacionario, es decir un modelo de la forma.

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Disponemos de la información $\{Y_1, Y_3\}$ y deseamos con esta información suavizar o pronosticar un posible valor para Y_2, muestre mediante las ecuaciones normales que el mejor predictor para Y_2 viene dado por,

$$P_{\{Y_1,Y_3\}}(Y_2) = \tfrac{\phi}{\phi^2+1}(Y_1 + Y_3)$$

9. Suponga $\{X_t, t = 0, \pm 1, \ldots\}$ es un proceso estacionario que satisface las ecuaciones

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ y ϵ_t es no correlacionado con X_s para todo $s < t$. Muestre que el mejor predictor lineal $P_n X_{n+1}$ de X_{n+1} en términos de $X_1, \ldots, X_n$ es,

$$P_n X_{n+1} = \phi_1 X_1 + \ldots + \phi_p X_{n+1-p}$$

10. Sea X_t un proceso MA definido por,

$$X_t = \theta Z_{t-4} + Z_t$$

donde $Z_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Demuestre a partir del algoritmo de Durbin Levinson que la funcion de autocorrelacion parcial del proceso esta dada por,

$$\phi_{nn} = \begin{cases} \frac{-(-\theta)^{n/4}}{(1+\theta^2+\theta^4+\ldots+\theta^{\frac{2n}{4}})} & \text{si n=4,8,12,\ldots,} \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

11. Calcule la FACP de los siguientes procesos,

   a) $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = \epsilon_t$
   b) $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = \epsilon_t + 0.2\epsilon_{t-1} + 0.7\epsilon_{t-2}$
   c) $X_t + 0.6X_{t-2} = \epsilon_t + 1.2\epsilon_{t-1}$
   d) $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = \epsilon_t$
   e) $X_t + 1.6X_{t-1} = \epsilon_t - 0.4\epsilon_{t-1} + 0.04\epsilon_{t-2}$