Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C
Facultad de Ciencia
Ingeniería Estadística

Guia 4: Series Cronológicas

Profesor: Felipe Elorrieta L. *Ayudante: Felipe Silva G.*

- **Procesos No Estacionarios**

1. Identifique los valores $(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ del modelo SARIMA en los siguientes casos

Modelo	p	d	q	P	D	Q	S
$(1 - 0.8B + 0.25B^2)\nabla X_t = \epsilon_t$							
$(1 - 0.7B^2)X_t = (1 + 0.3B^2)\epsilon_t$							
$X_t = (1 + 0.2B)(1 - 0.8B^{12})\epsilon_t$							
$X_t = X_{t-12} + \alpha(X_{t-1} - X_{t-13}) + \epsilon_t + \delta\epsilon_{t-13}$							

2. Considere el modelo ARIMA(0,1,1)

$$(1 - B)X_t = (1 - \theta B)\epsilon_t$$

donde $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y $|\theta| < 1$. Entonces,

a) Escriba las ecuaciones predictivas que generan las predicciones.

b) Hallar los limites de predicción del 95 % que son producidos por este modelo.

c) Exprese las predicciones como un promedio móvil de observaciones pasadas

3. Considere un proceso ARIMA(1,1,1) de la siguiente forma:

$$(1 - \phi B)(1 - B)X_t = (1 - \theta B)\epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$, $|\theta| < 1$ y $|\phi| < 1$. Muestre que el error cuadrático medio de predicción, utilizando el predictor con pasado infinito esta dado por,

$$\mathbb{E}[X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}]^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^2$$

donde,

$$\psi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, \\ (\phi - \theta) + 1 & \text{si } j = 1 \\ \frac{(\phi-\theta)(1-\phi^j)}{1-\phi} + 1 & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

4. Sea $\{y_t\}$ un proceso estacional tal que $y_t = (1 + 0.2B)(1 - 0.8B^{12})\epsilon_t$, donde $\sigma_\epsilon = 1$

   a) Determine los coeficientes π_j en la representacion $AR(\infty)$
   b) Grafique la FAC de y_t

5. Escriba los siguientes procesos SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ de forma explicita del tipo $\sum a_i X_{t-i} = \sum b_j \epsilon_{t-j}$. Además, en cada caso explique de que observaciones depende el valor de X_t.

   a) $(0, 1, 0) \times (1, 0, 1)_{12}$
   b) $(2, 0, 2) \times (1, 0, 0)_6$
   c) $(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)_4$

6. Considere el siguiente modelo ARMA estacional SARIMA$(1, 0, 1)x(0, 0, 1)_S$ de la siguiente forma:

$$(1 - \phi B)X_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^S)\varepsilon_t$$

   donde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ y $S \geq 3$. Calcule la función de autocovarianza del modelo.

7. Sea $y_t = \psi_t y_{t-s} + \epsilon_t$, un modelo SARIMA$(0, 0, 0)x(1, 0, 0)_S$, donde el entero s corresponde al periodo de la estacionalidad. Suponga que $|\psi| < 1$ y que $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$

   a) Muestre que la funcion de autocovarianza de este proceso esta dada por,

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2}{1 - \psi^2} \psi^{\left[\frac{h}{s}\right]}$$

   donde [.] denota la funcion entero.