

# Clase 1 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

17 de marzo de 2025



# Conceptos Básicos

- ▶ En muchos fenómenos naturales o sociales podemos medir ciertas variables y asignar un valor numérico a cada observación. Cuando hacemos esto, podemos hablar de una serie de observaciones  $\{y_t\}$  medidas secuencialmente en el tiempo.

# Conceptos Básicos

- ▶ En muchos fenómenos naturales o sociales podemos medir ciertas variables y asignar un valor numérico a cada observación. Cuando hacemos esto, podemos hablar de una serie de observaciones  $\{y_t\}$  medidas secuencialmente en el tiempo.
- ▶ Por simplicidad, llamaremos serie de tiempo o serie cronológica a cualquier conjunto de observaciones numéricas  $\{y_t, t \in T\}$  ordenadas en el tiempo, es decir la variable tiempo  $t$  es estrictamente creciente.

# Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

- ▶ **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)

# Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

- ▶ **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)
- ▶ **Predicción:** Inferir el comportamiento futuro del fenómeno, proporcionando intervalos de confianza para las predicciones.

# Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

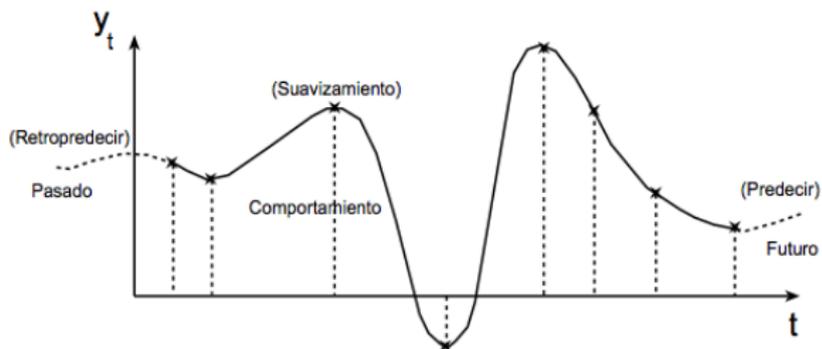
- ▶ **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)
- ▶ **Predicción:** Inferir el comportamiento futuro del fenómeno, proporcionando intervalos de confianza para las predicciones.
- ▶ **Retropredicción:** Inferir el comportamiento pasado del fenómeno,

# Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

- ▶ **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)
- ▶ **Predicción:** Inferir el comportamiento futuro del fenómeno, proporcionando intervalos de confianza para las predicciones.
- ▶ **Retropredicción:** Inferir el comportamiento pasado del fenómeno,
- ▶ **Imputación:** Imputar datos no observados en la serie de tiempo.

# Conceptos Básicos



# Conceptos Básicos

## Suavizamiento

Sea  $N_t = \{\underbrace{\dots, y_{t-1}}_{\text{Pasado}}, y_t, \underbrace{y_{t+1}, \dots}_{\text{Futuro}}\}$  el espacio compuesto por el pasado más el futuro de la serie, entonces  $\tilde{y}_t = P_{N_t} y_t$  es el valor suavizado de  $y_t$ .

# Conceptos Básicos

## Predicción

Sea  $M_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots\}$  el pasado del proceso  $\{y_t\}$ . Se define predicción como  $\hat{y}_{t+1} = P_{M_t} y_{t+1}$ .

# Conceptos Básicos

## Retropredicción

Sea  $\mathcal{F}_t = \{y_{t+1}, y_{t+2}, \dots\}$  el futuro de la serie en el instante  $t$ .  
Llamaremos retropredicción de  $y_t$  al valor  $\check{y}_t = P_{\mathcal{F}_t} y_t$ .

# Conceptos Básicos

## Imputación

Sea  $N_t = \{\underbrace{\dots, y_{t-1}}_{\text{Pasado}}, \underbrace{y_{t+1}, \dots}_{\text{Futuro}}\}$  el espacio compuesto por el pasado más el futuro de la serie, entonces  $\tilde{y}_t = P_{N_t} y_t$  es el valor suavizado de  $y_t$ .

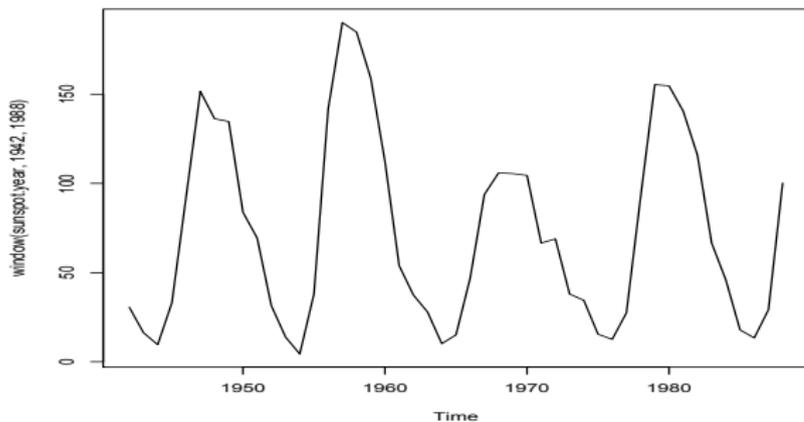
# Ejemplos de series de tiempo

## 1. Manchas Solares

# Ejemplos de series de tiempo

## 1. Manchas Solares

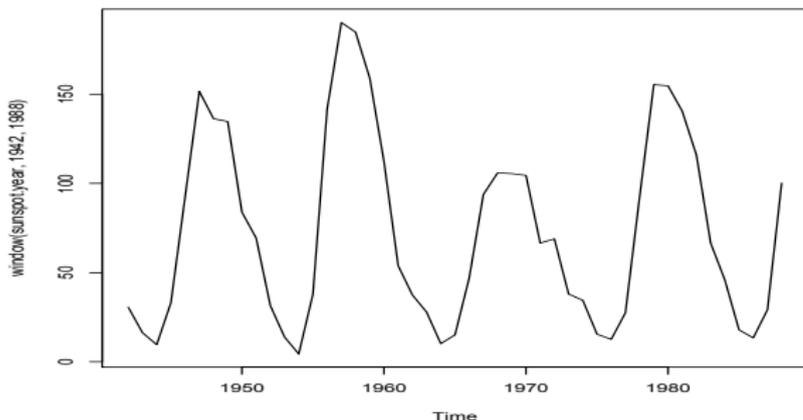
- ▶ Se estima que las erupciones de manchas solares ocurren aproximadamente cada 20 años. Su comportamiento temporal puedes ser representado por,



# Ejemplos de series de tiempo

## 1. Manchas Solares

- ▶ Se estima que las erupciones de manchas solares ocurren aproximadamente cada 20 años. Su comportamiento temporal puedes ser representado por,



- ▶ Este fenómeno presenta un carácter estacional. Se puede modelar a partir de

$$Y_t = A \sin(\omega t + \psi)$$

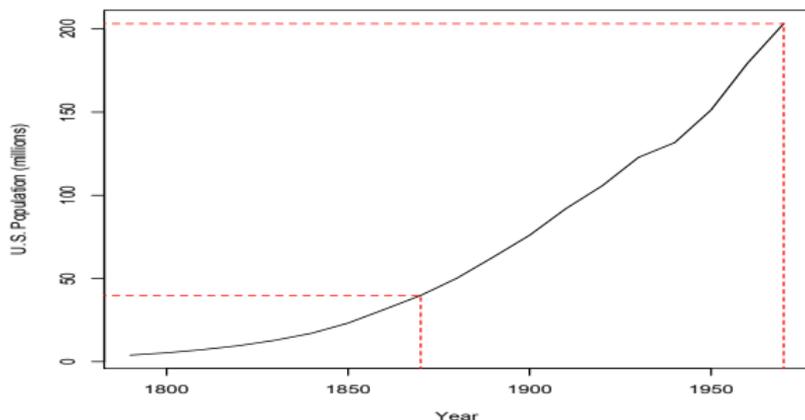
# Ejemplos de series de tiempo

## 2. Población anual de un país

# Ejemplos de series de tiempo

## 2. Población anual de un país

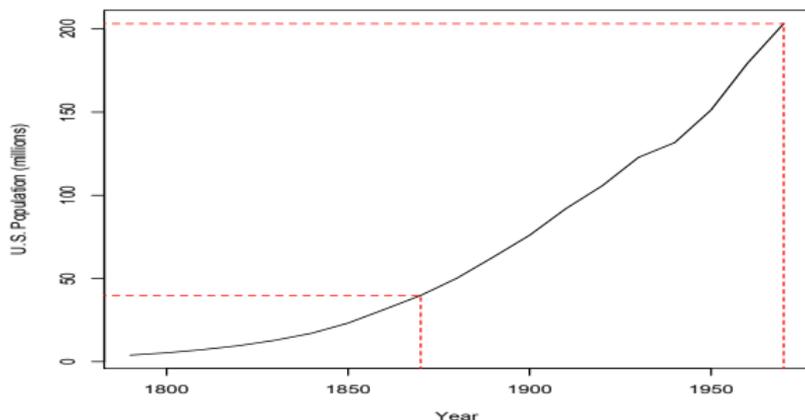
- ▶ Supongamos la serie de tiempo de la población de estados unidos (en millones de personas) medida por los censos de cada decada entre 1790-1970



# Ejemplos de series de tiempo

## 2. Población anual de un país

- ▶ Supongamos la serie de tiempo de la población de estados unidos (en millones de personas) medida por los censos de cada decada entre 1790-1970



- ▶ Notamos que la población en USA tiene un crecimiento exponencial. Se puede modelar a partir de,

$$Y_t = \alpha e^{\beta t}$$

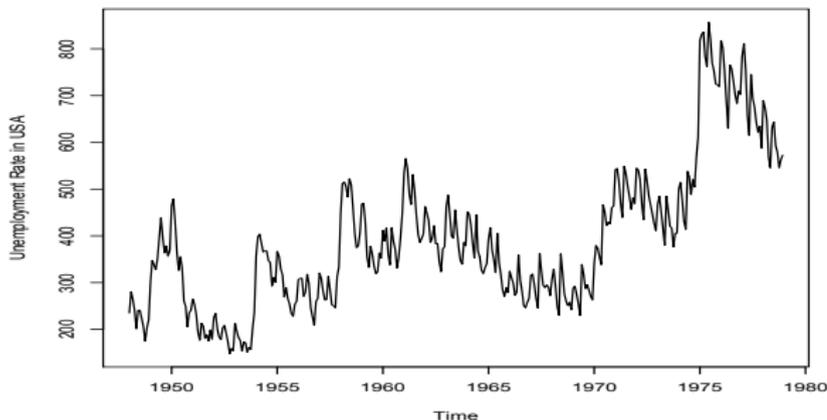
# Ejemplos de series de tiempo

## 3. Tasa de Desempleo en USA (Mensual)

# Ejemplos de series de tiempo

## 3. Tasa de Desempleo en USA (Mensual)

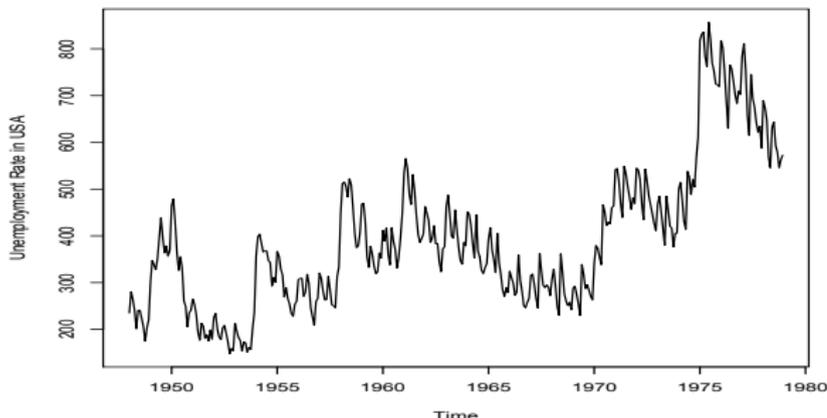
- ▶ Supongamos la serie de tiempo de la tasa de desempleados mensual en USA medida entre 1948 y 1978. Observamos una señal pero con mucho ruido.



# Ejemplos de series de tiempo

## 3. Tasa de Desempleo en USA (Mensual)

- ▶ Supongamos la serie de tiempo de la tasa de desempleados mensual en USA medida entre 1948 y 1978. Observamos una señal pero con mucho ruido.



- ▶ Una forma de extraer el ruido es a partir de promedios moviles, por ejemplo

$$Z_t = \frac{Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}}{3}$$

# Componentes de series de tiempo

- ▶ Nivel

# Componentes de series de tiempo

- ▶ Nivel
- ▶ Tendencia

# Componentes de series de tiempo

- ▶ Nivel
- ▶ Tendencia
- ▶ Estacionalidad

# Componentes de series de tiempo

- ▶ Nivel
- ▶ Tendencia
- ▶ Estacionalidad
- ▶ Componente Aleatoria

# Componentes de series de tiempo

- ▶ Nivel
- ▶ Tendencia
- ▶ Estacionalidad
- ▶ Componente Aleatoria
- ▶ Lo cual puede ser expresado por la siguiente ecuación,

$$Y_t = N_t + T_t + S_t + \epsilon_t$$

# Componentes de series de tiempo

- ▶ Nivel
- ▶ Tendencia
- ▶ Estacionalidad
- ▶ Componente Aleatoria
- ▶ Lo cual puede ser expresado por la siguiente ecuación,

$$Y_t = N_t + T_t + S_t + \epsilon_t$$

- ▶ Este modelo lleva el nombre de modelo aditivo, ya que la serie de tiempo se puede descomponer en la suma de cada uno de estos componentes.

# Series de Tiempo Determinísticas

- ▶ Si los futuros valores de una serie de tiempo son exactamente determinados por una función matemática como

$$Y_t = A \sin(\omega t + \psi)$$

la serie de tiempo se dice determinística.

# Series de Tiempo Determinísticas

- ▶ Si los futuros valores de una serie de tiempo son exactamente determinados por una función matemática como

$$Y_t = A \sin(\omega t + \psi)$$

la serie de tiempo se dice determinística.

- ▶ Una serie de tiempo se dice no determinística o simplemente estadística, si los futuros valores de una serie solo pueden ser descritos en términos de una distribución de probabilidad y por lo tanto, es imposible pronosticar el valor exacto para los siguientes tiempos.

# Proceso Estocástico

- ▶ **Definición:** Sea  $T$  un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$ , tal que, para todo  $t \in \mathcal{T}$ ,  $Y(t)$  es una variable aleatoria.

# Proceso Estocástico

- ▶ **Definición:** Sea  $T$  un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$ , tal que, para todo  $t \in \mathcal{T}$ ,  $Y(t)$  es una variable aleatoria.
- ▶ Es decir, un proceso estocástico es un fenómeno estadístico que se desarrolla en el tiempo según leyes probabilísticas.

# Proceso Estocástico

- ▶ **Definición:** Sea  $T$  un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$ , tal que, para todo  $t \in \mathcal{T}$ ,  $Y(t)$  es una variable aleatoria.
- ▶ Es decir, un proceso estocástico es un fenómeno estadístico que se desarrolla en el tiempo según leyes probabilísticas.
- ▶ Note que en el caso de las series de tiempo,  $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, n\}$  luego el proceso estocástico será definido como  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$

# Proceso Estacionario

- ▶ **Definición:** Un proceso estocástico  $Y(t)$  se dice estrictamente estacionario (o estacionario en el sentido fuerte) si todas las distribuciones de dimensión finita permanecen iguales en el tiempo, es decir,

$$F(Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_{k+n}) = F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

# Proceso Gaussiano

- ▶ **Definición:** Si la distribución de probabilidad de las observaciones asociadas con cualquier conjunto de tiempo es una distribución normal multivariada, el proceso es llamado Gaussiano o Normal.

# Proceso Gaussiano

- ▶ **Definición:** Si la distribución de probabilidad de las observaciones asociadas con cualquier conjunto de tiempo es una distribución normal multivariada, el proceso es llamado Gaussiano o Normal.
- ▶ Como la distribución normal multivariada está completamente caracterizada por sus dos primeros momentos, la existencia de una media y varianza fija para todo  $t$  es suficiente para garantizar la estacionaridad estricta del proceso Gaussiano.

# Estacionaridad Débil

- ▶ **Definición:** Un proceso estocástico  $Y(t)$  se dice debilmente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,

# Estacionaridad Débil

- ▶ **Definición:** Un proceso estocástico  $Y(t)$  se dice debilmente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,
  1.  $\mathbb{E}[Y_t] = \mu = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$

# Estacionaridad Débil

- **Definición:** Un proceso estocástico  $Y(t)$  se dice debilmente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,

1.  $\mathbb{E}[Y_t] = \mu = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$
2.  $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$

# Estacionaridad Débil

► **Definición:** Un proceso estocástico  $Y(t)$  se dice debilmente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,

1.  $\mathbb{E}[Y_t] = \mu = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$
2.  $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$
3. Existe una función  $\gamma(\cdot)$  tal que  
$$\text{Cov}(Y_t, Y_s) = \gamma(t - s) \quad \forall t, s \in \mathcal{T}$$

# Pregunta

- ▶ Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.

# Pregunta

- ▶ Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.
- ▶ Si, bajo  $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty \forall t$ .

# Pregunta

- ▶ Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.
- ▶ Si, bajo  $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty \forall t$ .
- ▶ Si un proceso es débilmente estacionario, es también estrictamente estacionario?.

# Pregunta

- ▶ Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.
- ▶ Si, bajo  $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty \forall t$ .
- ▶ Si un proceso es débilmente estacionario, es también estrictamente estacionario?.
- ▶ No.

# Ruido Blanco

- ▶ **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,

# Ruido Blanco

- ▶ **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,
  - i)  $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$

# Ruido Blanco

- ▶ **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,
  - i)  $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  - ii)  $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathcal{T}$

# Ruido Blanco

- **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,

i)  $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$

ii)  $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathcal{T}$

iii)  $\text{Cov}(Y_t, Y_s) = 0 \quad \forall t, s \in \mathcal{T}$

# Función de Autocovarianza

- ▶ **Definición:** Para un proceso débilmente estacionario definimos la función de autocovarianza (ACVF) como,

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= \mathbb{E}[Y_t - \mu][Y_{t+k} - \mu] \\ &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) \\ &= \text{Cov}(Y_{t+k}, Y_t) \\ &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) \\ &= \text{Cov}(Y_{t-k}, Y_t)\end{aligned}$$

# Función de Autocovarianza

## Propiedades

# Función de Autocovarianza

## Propiedades

1.  $\gamma(0) > 0$

# Función de Autocovarianza

## Propiedades

1.  $\gamma(0) > 0$
2.  $\gamma(k) = \gamma(-k)$

# Función de Autocovarianza

## Propiedades

1.  $\gamma(0) > 0$
2.  $\gamma(k) = \gamma(-k)$
3.  $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$

# Función de Autocovarianza

## Propiedades

1.  $\gamma(0) > 0$
2.  $\gamma(k) = \gamma(-k)$
3.  $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$
4.  $\gamma(k)$  es definida no negativa, en sentido que,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \gamma(k_i - k_j) \geq 0$$

Para cualquier número real  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  y  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$

# Función de Autocorrelación

- ▶ **Definición:** Para un proceso débilmente estacionario definimos la función de autocorrelación (ACF) como,

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

## Ejemplo

- ▶ Sea  $\{\epsilon_t\}$  una secuencia de ruido blanco con  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$  y  $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$ . Cuál es su función de autocorrelación?

## Ejemplo

- ▶ Sea  $\{\epsilon_t\}$  una secuencia de ruido blanco con  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$  y  $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$ . Cuál es su función de autocorrelación?

## Ejemplo

- ▶ Sea  $\{\epsilon_t\}$  una secuencia de ruido blanco con  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$  y  $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$ . Cuál es su función de autocorrelación?

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{\sigma^2 \delta(k)}{\sigma^2} = \delta(k)$$

# Estimación de ACVF y ACF

- ▶ Sea la serie de tiempo observada o muestreada  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , un estimador para la función de autocorrelación  $\rho(k)$  está dado por

$$r_k = \hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

donde

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, K$$

y  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t$  es la media muestral de la serie de tiempo.

# Consideraciones

- ▶ Para obtener una estimación útil de la función de autocorrelación, necesitamos típicamente al menos  $N = 50$  observaciones. Además, las autocorrelaciones estimadas  $r_k$  deben ser calculadas para  $k = 0, 1, \dots, K$ , donde  $K$  no sea mayor que  $N/4$ .

# Consideraciones

- ▶ Para obtener una estimación útil de la función de autocorrelación, necesitamos típicamente al menos  $N = 50$  observaciones. Además, las autocorrelaciones estimadas  $r_k$  deben ser calculadas para  $k = 0, 1, \dots, K$ , donde  $K$  no sea mayor que  $N/4$ .
- ▶ Si  $\rho(k)$  es 0 para todo  $k$  entonces el proceso estocástico es completamente aleatorio, también llamado ruido blanco. En este caso el error estándar para las autocorrelaciones estimadas  $r_k$  se define como:

$$se[r_k] \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

# Consideraciones

- ▶ Para obtener una estimación útil de la función de autocorrelación, necesitamos típicamente al menos  $N = 50$  observaciones. Además, las autocorrelaciones estimadas  $r_k$  deben ser calculadas para  $k = 0, 1, \dots, K$ , donde  $K$  no sea mayor que  $N/4$ .
- ▶ Si  $\rho(k)$  es 0 para todo  $k$  entonces el proceso estocástico es completamente aleatorio, también llamado ruido blanco. En este caso el error estándar para las autocorrelaciones estimadas  $r_k$  se define como:

$$se[r_k] \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- ▶ En los gráficos de  $R$  de la ACF muestral se asume esta desviación estándar para calcular los límites de significancia de  $r_k$

## Ejemplo

- ▶ Sean las mediciones de la temperatura en un reactor químico por minuto:

200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,  
202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.

# Ejemplo

- ▶ Sean las mediciones de la temperatura en un reactor químico por minuto:

200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,  
202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.

1. Grafique  $y_{t+1}$  vs  $y_t$

# Ejemplo

- ▶ Sean las mediciones de la temperatura en un reactor químico por minuto:

200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,  
202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.

1. Grafique  $y_{t+1}$  vs  $y_t$
2. Grafique  $y_{t+2}$  vs  $y_t$

# Ejemplo

- ▶ Sean las mediciones de la temperatura en un reactor químico por minuto:

200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,  
202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.

1. Grafique  $y_{t+1}$  vs  $y_t$
2. Grafique  $y_{t+2}$  vs  $y_t$
3. Viendo los gráficos considera que la serie está autocorrelacionada?

# Ejemplo

- ▶ Sean las mediciones de la temperatura en un reactor químico por minuto:

200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,  
202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.

1. Grafique  $y_{t+1}$  vs  $y_t$
2. Grafique  $y_{t+2}$  vs  $y_t$
3. Viendo los gráficos considera que la serie está autocorrelacionada?
4. Obtenga  $r_1$  y  $r_2$