Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C
Facultad de Ciencia
Ingeniería Estadística

Guía 1: Series Cronológicas

Profesor: Felipe Elorrieta L. *Ayudante: Felipe Silva G.*

- **Conceptos Básicos**

1. Sea $Z_t = Usin(2\pi t) + Vcos(2\pi t)$, donde U y V son v.a. independientes, cada una con media 0 y varianza 1.

   a) Es $\{Z_t\}$ estacionario de 2do orden?
   b) Discuta condiciones para que el proceso $\{Z_t\}$ sea estrictamente estacionario.

2. Dado el proceso Z_t definido por.

   a) $Z_t = \beta_0 + \beta_1 \epsilon_t$
   b) $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$
   c) $Z_t = \beta_0^t exp\{\epsilon_t\}$
   d) $Z_t = \beta_0 + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1}$

   donde β_0 y β_1 son constantes y $\{\epsilon_t\}$ es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza σ^2, defina un nuevo proceso Y_t (en función de Z_t) que sea estacionario. Proporcione $\mathbb{E}[Y_t]$, $\mathbb{V}[Y_t]$ y $Cov(Y_t, Y_{t+k})$, para $k = 1, 2, \ldots$.

3. Sean Z_1 y Z_2 dos variables aleatorias tal que $\mathbb{E}[Z_1] = \mu_1$, $\mathbb{E}[Z_2] = \mu_2$, $\mathbb{V}[Z_1] = \sigma_{11}$, $\mathbb{V}[Z_2] = \sigma_{22}$, $Cov(Z_1, Z_2) = \sigma_{12}$ y el proceso $X_t = Z_1 + Z_2 t$, $t \in \mathbb{R}$. Determine condiciones para que X_t sea un proceso estacionario de segundo orden.

4. Mostrar que las dos series de tiempo.

   a) $X_t = \epsilon_t - 2.25\epsilon_{t-1} + 0.5\epsilon_{t-2}$
   b) $X_t = \epsilon_t - 0.75\epsilon_{t-1} + 0.125\epsilon_{t-2}$

   tienen la misma función de autocorrelación.

5. Si $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ son secuencias estacionarias no correlacionadas, ie, si X_r y Y_s son no correlacionados $\forall r, s$. Muestre que $\{X_t + Y_t\}$ es estacionario con función de autocovarianza igual a la suma de las funciones de autocovarianza de $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$

6. Verifique las siguientes propiedades de la FAC de un proceso estacionario:

    a) $\rho(0) = 1$
    b) $|\rho(k)| \leq 1$
    c) $\rho(k) = \rho(-k)$

- **Descomposición clásica de una serie de Tiempo.**

7. Muestre que la predicción del alisado exponencial simple que se obtiene de la formula $\hat{X}_t(h) = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}(h+1)$, puede ser reescrita para h=1 como $\hat{X}_t(1) = \alpha e_t + \hat{X}_{t-1}(1)$, donde $e_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1)$

8. Considere el filtro de media móvil con pesos $\omega_j = \frac{1}{2q+1} \qquad -q \leq j \leq q$.

    a) Si $T_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$ muestre que $\sum\limits_{j=-q}^{q} \omega_j T_{t-j} = T_t$
    b) Si $\varepsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con media 0 y varianza σ^2, muestre que el promedio móvil $\sum\limits_{j=-q}^{q} \omega_j \varepsilon_{t-j}$ es pequeño para q grande en el sentido que $\mathbb{E}[x_t] = 0$ y $\mathbb{V}[x_t] = \frac{\sigma^2}{2q+1}$

9. Las siguientes observaciones corresponden a las ventas en miles de pesos (M$) de un determinado producto. A partir de la tabla responda las siguientes preguntas:

	ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sep	oct	nov	dic
1975	19	15	39	102	90	29	90	46	30	66	80	89
1976	82	17	26	29								

    a) Grafique el conjunto de datos y señale los aspectos más relevantes y técnicas posibles de predicción y aplique medias móviles utilizando tres meses como punto de referencia.
    b) Utilice AES con $\alpha = 0.3$ y obtenga la predicción para mayo del 1976 y junio de 1976.
    c) Encuentre los intervalos de confianza para las predicciones de la parte b) con $\alpha = 0.05$. Predicción a 1 y 2 pasos.